MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.03 Differential Equations, Spring 2006
Transcript – Lecture 1

OK, let's get started. I'm assuming that, A, you went recitation yesterday, B, that even if you didn't, you know how to separate variables, and you know how to construct simple models, solve physical problems with differential equations, and possibly even solve them. So, you should have learned that either in high school, or 18.01 here, or, yeah. So, I'm going to start from that point, assume you know that. I'm not going to tell you what differential equations are, or what modeling is. If you still are uncertain about those things, the book has a very long and good explanation of it. Just read that stuff. So, we are talking about first order ODEs.
Vâng, chúng ta hãy bắt đầu. Tôi giữ sử rằng, A, bạn đã đi đến buổi ôn bài ngày hôm qua, B, cho dù bạn không đến, bạn biết cách tách biến, và bạn biết cách để xây dựng một mô hình đơn giản, giải các bài toán vật lí với các phương trình vi phân, và thậm chí có thể giải chúng. Vì vậy, bạn đáng lẽ đã phải học nó hoặc ở trường phổ thông, hoặc 18.01 ở đây, hoặc, vâng. Vì vậy, tôi sẽ bắt đầu từ điểm đó, giả sử bạn biết điều đó. Tôi sẽ không định nghĩa lại phương trình vi phân là gì hoặc mô hình là gì. Nếu bạn vẫn còn chưa nắm vững những thứ này, sách đã nói rất nhiều và giải thích rất rõ ràng về nó. Hãy đọc nó đi. Vì vậy, chúng ta sẽ nói về các phương trình vi phân bậc nhất.

ODE: I'll only use two acronyms. ODE is ordinary differential equations. I think all of MIT knows that, whether they've been taking the course or not. So, we are talking about first-order ODEs, which in standard form, are written, you isolate the derivative of y with respect to, x, let's say, on the left-hand side, and on the right-hand side you write everything else. You can't always do this very well, but for today, I'm going to assume that it has been done and it's doable. So, for example, some of the ones that will be considered either today or in the problem set are things like y' = x / y.
ODE: Tôi sẽ chỉ dùng hai từ viết tắc. ODE là phương trình vi phân thường. Tôi nghĩ mọi người trong MIT này đều biết điều đó, cho dù họ có học về khóa học này hay không. Vì vậy, chúng ta sẽ nói về các phương trình vi phân bậc nhất, ở dạng tiêu chuẩn, được viết, bạn tách riêng đạo hàm của y theo x, giả sử rằng, ở vế trái, và ở vế phải bạn viết mọi thứ còn lại. Bạn không thể lúc nào cũng làm được như thế này, nhưng đối với hôm nay, tôi sẽ giả sử rằng nó đã được làm và có thể làm được. Vì vậy, chẳng hạn, một số dạng sẽ được xét hoặc trong hôm nay hoặc trong xấp bài tập là những phương trình có dạng y' = f(x , y).

That's pretty simple. The problem set has y' = x - y^2. And, it also has y' = y - x^2. There are others, too. Now, when you look at this, this, of course, you can solve by separating variables. So, this is solvable. This one is-- and neither of these can you separate variables. And they look extremely similar. But they are extremely dissimilar. The most dissimilar about them is that this one is easily solvable. And you will learn, if you don't know already, next time next Friday how to solve this one
Cái đó khá đơn giản. Xấp bài tập có bài y' = x - y^2. Và, cũng có bài y' = y - x^2. Cũng có những bài khác nữa. Bây giờ, khi bạn xét cái này, đây, tất nhiên, bạn có thể giải bằng phương pháp tách biến. Vì vậy, cái này có thể giải được. Cái này là - - và cả hai cái này bạn không thể tách biến. Và trông chúng rất giống nhau. Nhưng thực sự chúng rất khác nhau. Sự khác nhau rõ rệt nhất là cái này có thể giải được. Và bạn sẽ học, nếu bạn chưa biết, lần tới thứ sáu tới cách để giải cái này

This one, which looks almost the same, is unsolvable in a certain sense. Namely, there are no elementary functions which you can write down, which will give a solution of that differential equation. So, right away, one confronts the most significant fact that even for the simplest possible differential equations, those which only involve the first derivative, it's possible to write down extremely looking simple guys.

Cái này, có vẻ khá giống, nhưng không thể giải được theo một ý nghĩa nào đó. Cụ thể, không có những hàm cơ bản mà bạn có thể viết ra, sẽ cho nghiệm của phương trình vi phân. Vì vậy, ngay tức thì, người ta đối mặt với sự kiện có ý nghĩa nhất là thậm chí cho dù đối với những phương trình vi phân đơn giản nhất, những phương trình này chỉ liên quan đến đạo hàm bậc nhất, có thể viết ra những thằng trông cực kì đơn giản.

I'll put this one up in blue to indicate that it's bad. Whoops, sorry, I mean, not really bad, but recalcitrant. It's not solvable in the ordinary sense in which you think of an equation is solvable. And, since those equations are the rule rather than the exception, I'm going about this first day to not solving a single differential equation, but indicating to you what you do when you meet a blue equation like that.

Tôi sẽ đánh dấu cái này màu xanh lam để cho biết rằng nó là xấu. Whoops, xin lỗi, ý tôi là, không thực sự xấu, nhưng ngoan cố. Nó không phải không giải được theo nghĩa thông thường như bạn thường nghĩ. Và,bởi vì những phương trình là theo quy tắc chứ không phải là các ngoại lệ,trong buổi đầu tiên này tôi sẽ không giải một phương trình vi phân đơn giản, mà chỉ ra cho bạn những gì bạn làm khi bạn gặp một phương trình xanh như thế.

What do you do with it? So, this first day is going to be devoted to geometric ways of looking at differential equations and numerical. At the very end, I'll talk a little bit about numerical ways. And you'll work on both of those for the first problem set. So, what's our geometric view of differential equations? Well, it's something that's contrasted with the usual procedures, by which you solve things and find elementary functions which solve them. I'll call that the analytic method. So, on the one hand, we have the analytic ideas, in which you write down explicitly the equation, y' = f(x,y).

Bạn làm gì với nó? Vì vậy, ngày đầu tiên này sẽ được dành cho việc dùng những phương pháp hình học để xét các phương trình vi phân và biểu diễn số. Vào cuối buổi, tôi sẽ nói một chút về phương pháp số. Và bạn sẽ làm việc trên cả hai trong xấp bài tập đầu tiên. Vì vậy, cách nhìn hình học của chúng ta về các phương trình vi phân là như thế nào? Vâng, đó là cái gì trái ngược với các thủ tục thông thường, qua đó bạn giải mọi thứ và tìm thấy các hàm cơ bản giải chúng. Tôi sẽ gọi đó là phương pháp giải tích. Vì vậy, một mặt, chúng ta có những ý tưởng phân tích, trong đó bạn viết ra rõ ràng các phương trình, y '= f (x, y).

And, you look for certain functions, which are called its solutions. Now, so there's the ODE. And, y1 of x, notice I don't use a separate letter. I don't use g or h or something like that for the solution because the letters multiply so quickly, that is, multiply in the sense of rabbits, that after a while, if you keep using different letters for each new idea, you can't figure out what you're talking about.

Và, bạn tìm các hàm nào đó, được gọi là các nghiệm của nó. Bây giờ, vì vậy đó là phương trình vi phân thường. Và, y1 x, chú ý tôi không sử dụng một kí tự riêng biệt. Tôi không sử dụng g hoặc h hoặc thứ gì đó tương tự như thế cho nghiệm bởi vì các chữ cái nhân quá nhanh, có nghĩa là, nhân trong ý nghĩa của thỏ, sau một lúc, nếu bạn tiếp tục sử dụng các chữ cái khác nhau cho mỗi ý tưởng mới, bạn không thể tìm ra những gì bạn đang nói.

So, I'll use y1 means, it's a solution of this differential equation. Of course, the differential equation has many solutions containing an arbitrary constant. So, we'll call this the solution. Now, the geometric view, the geometric guy that corresponds to this version of writing the equation, is something called a direction field. And, the solution is, from the geometric point of view, something called an integral curve. So, let me explain if you don't know what the direction field is. I know for some of you, I'm reviewing what you learned in high school. Those of you who had the BC syllabus in high school should know these things. But, it never hurts to get a little more practice. And, in any event, I think the computer stuff that you will be doing on the problem set, a certain amount of it should be novel to you.

Vì vậy, tôi sẽ sử dụng y1 với nghĩa là, nó là một nghiệm của phương trình vi phân này. Tất nhiên, một phương trình vi phân có nhiều nghiệm chứa một hằng số tùy ý. Vì vậy, chúng ta sẽ gọi đây là nghiệm. Bây giờ, quan điểm hình học, đối tượng hình học tương ứng với phiên bản này của cách viết phương trình vi phân, được gọi là một trường có hướng. Và, từ quan điểm hình học, nghiệm được gọi là đường cong tích phân. Để tôi giải thích nếu bạn không biết trường có hướng là gì. Đối với một số bạn, có lẽ là tôi đang nhắc lại những gì mà bạn đã học ở trường trung học. Những bạn đã học chương trình học BC ở trường trung học chắc sẽ biết những cái này. Tuy nhiên, không bao giờ lãng phí nếu bạn nhận được một ít kiến thức thực tế hơn. Và, trong bất cứ trường hợp nào, tôi nghĩ rằng các phương pháp tính toán mà bạn sẽ thực hiện trên xấp bài tập, một lượng nhất định của nó sẽ mới lạ đối với bạn.

It was novel to me, so why not to you? So, what's a direction field? Well, the direction field is, you take the plane, and in each point of the plane-- of course, that's an impossibility. But, you pick some points of the plane. You draw what's called a little line element. So, there is a point. It's a little line, and the only thing which distinguishes it outside of its position in the plane, so here's the point, (x,y), at which we are drawing this line element, is its slope. And, what is its slope? Its slope is to be f(x,y). And now, You fill up the plane with these things until you're tired of putting then in. So, I'm going to get tired pretty quickly.

Nó mới đối với tôi, vậy tại sao không mới đối với bạn? Vậy, trường có hướng là gì? Vâng, trường có hướng là, bạn chọn một mặt phẳng, và tại mỗi điểm của mặt phẳng - tất nhiên, đó là một điều không thể. Nhưng, bạn chọn một số điểm của mặt phẳng. Bạn vẽ một yếu tố đường nhỏ. Vì vậy, đó là một điểm. Nó là một đường nhỏ, và thứ duy nhất phân biệt các yếu tố đường thẳng với nhau, vì vậy đây là điểm, (x, y), tại đó chúng ta vẽ yếu tố đường thẳng này, là hệ số góc của nó. Và, hệ số góc của nó là gì? Hệ số góc của nó là f (x, y). Và bây giờ, bạn lấp đầy mặt phẳng với những thứ này cho đến khi bạn mệt mỏi. Vì vậy, tôi sẽ cảm thấy mệt mỏi khá nhanh chóng.

So, I don't know, let's not make them all go the same way. That sort of seems cheating. How about here? Here's a few randomly chosen line elements that I put in, and I putted the slopes at random since I didn't have any particular differential equation in mind. Now, the integral curve, so those are the line elements. The integral curve is a curve, which goes through the plane, and at every point is tangent to the line element there.

Vì vậy, tôi không biết, chúng ta không làm cho tất cả chúng đi theo cùng đường. Điều đó phần nào có vẻ như gian lận. Còn ở đây thì sao? Đây là một vài yếu tố đường thẳng được chọn ngẫu nhiên mà tôi đặt vào, và tôi đặt hệ số góc ngẫu nhiên bởi vì tôi không có bất cứ phương trình vi phân đặc biệt nào trong đầu. Bây giờ, các đường cong tích phân, đó là những yếu tố đường thẳng. Đường cong tích phân là đường cong nằm trong mặt phẳng, và tại mỗi điểm là tiếp tuyến với yếu tố đường thẳng tại đó.

So, this is the integral curve. Hey, wait a minute, I thought tangents were the line element there didn't even touch it. Well, I can't fill up the plane with line elements. Here, at this point, there was a line element, which I didn't bother drawing in. And, it was tangent to that. Same thing over here: if I drew the line element here, I would find that the curve had exactly the right slope there.

Vì vậy, đây là đường cong tích phân. Này, chờ một chút, tôi nghĩ tiếp tuyến là yếu tố đường thẳng ở đó thậm chí không chạm nó. Vâng, tôi không thể làm đầy toàn bộ mặt phẳng với các yếu tố đường thẳng. Ở đây, vào thời điểm này, đã có một yếu tố đường thẳng mà tôi chưa vẽ. Và, nó tiếp tuyến với cái đó. Điểm trên đây tương tự: nếu tôi vẽ các yếu tố đường thẳng ở đây, tôi sẽ thấy rằng đường cong có hệ số góc đúng như ở đó.

So, the point is the integral, what distinguishes the integral curve is that everywhere it has the direction, that's the way I'll indicate that it's tangent, has the direction of the field everywhere at all points on the curve, of course, where it doesn't go. It doesn't have any mission to fulfill. Now, I say that this integral curve is the graph of the solution to the differential equation. In other words, writing down analytically the differential equation is the same geometrically as drawing this direction field, and solving analytically for a solution of the differential equation is the same thing as geometrically drawing an integral curve. So, what am I saying?

Vì vậy, vấn đề ở đây là, điểm phân biệt các đường cong tích phân là ở khắp mọi nơi là nó có hướng, đó là cách mà tôi sẽ chỉ ra rằng nó là tiếp tuyến, có hướng của trường ở khắp mọi nơi ở tất cả các điểm trên đường cong. Tất nhiên, nơi mà nó không đi qua. Nó không có bất kỳ nhiệm vụ nào để hoàn thành. Bây giờ, tôi nói rằng đường cong tích phân này là đồ thị của nghiệm của phương trình vi phân. Nói cách khác, viết ra dạng giải tích của phương trình vi phân về mặt hình học sẽ tương đương với việc vẽ trường có hướng này, và giải bằng phương pháp giải tích nghiệm của phương trình vi phân tương đương với vẽ một đường cong tích phân về mặt hình học. Vậy, tôi đang nói gì?

I say that an integral curve, all right, let me write it this way. I'll make a little theorem out of it, that y1(x) is a solution to the differential equation if, and only if, the graph, the curve associated with this, the graph of y1 of x is an integral curve. Integral curve of what? Well, of the direction field associated with that equation. But there isn't quite enough room to write that on the board. But, you could put it in your notes, if you take notes. So, this is the relation between the two, the integral curves of the graphs or solutions.

Tôi nói rằng một đường cong tích phân, đúng rồi, hãy để tôi viết nó theo cách này. Tôi sẽ tạo ra một định lý nhỏ về điều đó, đó là y1 (x) là một nghiệm của phương trình vi phân nếu, và chỉ nếu, đồ thị, đường cong gắn với nó, đồ thị của y1(x) là một đường cong tích phân. Đường cong tích phân của cái gì? Vâng, của trường có hướng gắn với phương trình đó. Nhưng không có đủ chổ trống để viết điều đó trên bảng. Tuy nhiên, bạn có thể viết vào trong vở của bạn, nếu bạn ghi chép. Vì vậy, đây là mối quan hệ giữa hai cái, các đường cong tích phân của đồ thị hoặc các nghiệm.

Now, why is that so? Well, in fact, all I have to do to prove this, if you can call it a proof at all, is simply to translate what each side really means. What does it really mean to say that a given function is a solution to the differential equation? Well, it means that if you plug it into the differential equation, it satisfies it. Okay, what is that? So, how do I plug it into the differential equation and check that it satisfies it?

Bây giờ, tại sao điều đó lại như vậy? Vâng, trên thực tế, tất cả những gì tôi phải làm để chứng minh điều này là, cũng chưa hẳn là một chứng minh , chỉ đơn giản là để diễn giải xem mỗi vế thực sự có nghĩa gì. Một hàm cho trước là một nghiệm của phương trình vi phân có ý nghĩa gì? Vâng, nó có nghĩa là nếu bạn thế nó vào trong phương trình vi phân, nó thỏa mãn phương trình vi phân đó. Được rồi, đó là gì? Vì vậy, làm cách nào để thế nó vào các phương trình vi phân và kiểm tra xem nó thỏa mãn phương trình vi phân?

Well, doing it in the abstract, I first calculate its derivative. And then, how will it look after I plugged it into the differential equation? Well, I don't do anything to the x, but wherever I see y, I plug in this particular function. So, in notation, that would be written this way. So, for this to be a solution means this, that that equation is satisfied. Okay, what does it mean for the graph to be an integral curve? Well, it means that at each point, the slope of this curve, it means that the slope of y1 of x should be, at each point, (x1,y1). It should be equal to the slope of the direction field at that point.

Vâng, về khía cạnh lí thuyết thực hiện nó , đầu tiên tôi tính đạo hàm của nó. Và sau đó, nó sẽ trông như thế nào sau khi tôi thế nó vào trong phương trình vi phân? Vâng, tôi không làm gì đối với x, nhưng bất cứ nơi nào tôi thấy y, tôi thế vào hàm cụ thể này. Vì vậy, theo quy ước, nó sẽ được viết theo cách này. Vì vậy, khi cái này là nghiệm theo nghĩa này, thì phương trình đó được thõa mãn. Được rồi, đồ thị là một đường cong tích phân có nghĩa là gì? Vâng, nó có nghĩa là tại mỗi điểm, hệ số góc của đường cong này, nó có nghĩa là hệ số góc của y1(x) sẽ là, tại mỗi điểm (x1, y1). Nó sẽ bằng hệ số góc của trường vô hướng tại điểm đó.

And then, what is the slope of the direction field at that point? Well, it is f of that particular, well, at the point, (x,y1). If you like, you can put a subscript, one, on there, send a one here or a zero there, to indicate that you mean a particular point. But, it looks better if you don't. But, there's some possibility of confusion. I admit to that. So, the slope of the direction field, what is that slope? Well, by the way, I calculated the direction field. Its slope at the point was to be x, whatever the value of x was, and whatever the value of y1(x) was, substituted into the right-hand side of the equation. So, what the slope of this function of that curve of the graph should be equal to the slope of the direction field. Now, what does this say?

Và rồi, hệ số góc của trường có hướng tại điểm đó là gì? Vâng, nó là giá trị của hàm f tại điểm đó, vâng, tại điểm, (x, y1). Nếu bạn thích, bạn có thể đặt một chỉ số dưới, một, ở đó , để một ở đây hoặc không ở đó, để cho biết rằng bạn muốn nói đến một điểm cụ thể. Tuy nhiên, sẽ tốt hơn nếu bạn không làm như vậy. Nhưng, có một số khả năng gây nhầm lẫn. Tôi thừa nhận điều đó. Vì vậy, hệ số góc của trường có hướng, hệ số góc đó bằng bao nhiêu? Vâng, tiện thể, tôi đã tính toán trường có hướng. Hệ số góc của nó tại điểm x, bất kể giá trị của x bằng bao nhiêu, và bất kể giá trị của y1 (x) bằng bao nhiêu, được thế vào vế phải của phương trình. Vì vậy, hệ số góc của hàm này của đường cong đó của đồ thị sẽ bằng hệ số góc của trường có hướng. Bây giờ, điều này nói lên cái gì?

Well, what's the slope of y1(x)? That's y1'(x). That's from the first day of 18.01, calculus. What's the slope of the direction field? This? Well, it's this. And, that's with the right hand side. So, saying these two guys are the same or equal, is exactly, analytically, the same as saying these two guys are equal. So, in other words, the proof consists of, what does this really mean? What does this really mean? And after you see what both really mean, you say, yeah, they're the same.

Vâng, hệ số góc của y1(x) bằng bao nhiêu? Đó là y1 '(x). Điều này các bạn đã học trong buổi đầu của 18,01, giải tích. Hệ số góc của trường có hướng bằng bao nhiêu? Cái này à? Vâng, nó là cái này. Và, đó là với vế bên phải. Vì vậy, nói rằng hai thằng này giống nhau hoặc tương đương nhau, thì chính xác, về mặt giải tích, giống như nói rằng hai thằng này bằng nhau. Vì vậy, nói cách khác, chứng minh gồm có, cái này thực sự có ý nghĩa gì? Cái này thực sự có nghĩa gì? Và sau khi bạn hiểu được nó thật sự có ý nghĩa gì, bạn nói, yeah, chúng giống nhau.

So, I don't how to write that. It's okay: same, same, how's that? This is the same as that. Okay, well, this leaves us the interesting question of how do you draw a direction from the, well, this being 2003, mostly computers draw them for you. Nonetheless, you do have to know a certain amount. I've given you a couple of exercises where you have to draw the direction field yourself. This is so you get a feeling for it, and also because humans don't draw direction fields the same way computers do. So, let's first of all, how did computers do it? They are very stupid. There's no problem.

Vì vậy, tôi không biết cách viết nó. Nó ổn: giống nhau, giống nhau, làm sao thế nhỉ? Cái này tương tự như cái đó. Được rồi, tốt, cái này để lại cho chúng ta một câu hỏi thú vị về cách mà bạn vẽ một trường có hướng từ, vâng, đây là năm 2003, chủ yếu là máy tính vẽ chúng cho bạn. Tuy nhiên, bạn phải biết một lượng nhất định. Tôi đã đưa cho bạn một vài bài tập, trong đó bạn phải tự vẽ các trường có hướng. Điều này giúp bạn có được một cảm giác về nó, và cũng bởi vì con người không vẽ trường có hướng giống như cách máy tính làm. Vì vậy, trước hết chúng ta hãy xét, máy tính đã làm điều đó như thế nào? Chúng rất ngớ ngẩn. Không có vấn đề gì.

Since they go very fast and have unlimited amounts of energy to waste, the computer method is the naive one. You pick the point. You pick a point, and generally, they are usually equally spaced. You determine some spacing, that one: blah, blah, blah, blah, blah, blah, blah, equally spaced. And, at each point, it computes f(x, y) at the point, finds, meets, and computes the value of f of (x, y), that function, and the next thing is, on the screen, it draws, at (x, y), the little line element having slope f(x, y). In other words, it does what the differential equation tells it to do.

Bởi vì chúng hoạt động với tốc độ rất nhanh và không hạn chế về lượng năng lượng sử dụng, phương pháp máy tính là một phương pháp ngây thơ. Bạn chọn điểm. Bạn chọn một điểm, và nói chung, chúng thường cách đều nhau. Bạn xác định khoảng cách nào đó, cái đó: blah, blah, blah, blah, blah, blah, blah, cách đều nhau. Và, ở mỗi điểm, nó tính giá trị của f (x, y) tại điểm này, tìm, gặp, và tính giá trị của f (x, y), hàm đó, và điều tiếp theo là, trên màn hình, nó vẽ, tại(x, y),yếu tố đường thẳng nhỏ có hệ số góc f (x, y). Nói cách khác, nó làm những gì mà các phương trình vi phân bảo nó làm.

And the only thing that it does is you can, if you are telling the thing to draw the direction field, about the only option you have is telling what the spacing should be, and sometimes people don't like to see a whole line. They only like to see a little bit of a half line. And, you can sometimes tell, according to the program, tell the computer how long you want that line to be, if you want it teeny or a little bigger. Once in awhile you want you want it narrower on it, but not right now.

Và thứ duy nhất mà nó làm là bạn có thể, nếu bạn đang nói thứ để vẽ trường có hướng, tùy chọn duy nhất mà bạn có là cho biết khoảng cách sẽ bằng bao nhiêu, và thỉnh thoảng người ta không thích thấy toàn bộ một đường thẳng. Họ chỉ thích thấy một ít của nửa đường thẳng. Và thỉnh thoảng bạn có thể nói, theo chương trình, nói cho máy tính biết bạn muốn đường thẳng đó dài bao nhiêu, bạn muốn nó nhỏ hay lớn hơn một chút. Thỉnh thoảng bạn muốn bạn muốn nó hẹp hơn, nhưng không phải ngay bây giờ.

Okay, that's what a computer does. What does a human do? This is what it means to be human. You use your intelligence. From a human point of view, this stuff has been done in the wrong order. And the reason it's been done in the wrong order: because for each new point, it requires a recalculation of f(x, y). That is horrible. The computer doesn't mind, but a human does. So, for a human, the way to do it is not to begin by picking the point, but to begin by picking the slope that you would like to see. So, you begin by taking the slope. Let's call it the value of the slope, C. So, you pick a number. C is two. I want to see where are all the points in the plane where the slope of that line element would be two? Well, they will satisfy an equation.

Được rồi, đó là những gì mà máy tính làm. Còn con người làm như thế nào? Thế mới là con người. Bạn sử dụng trí thông minh của bạn. Từ quan điểm con ng ười, cái này đã được thực hiện theo thứ tự sai. Và lý do nó được thực hiện theo thứ tự sai: vì đối với mỗi điểm mới, cần phải tính toán lại f (x, y). Điều đó thật kinh khủng. Các máy tính không bận tâm, nhưng một con người thì khác. Vì vậy, đối với một con người, cách để làm điều đó không phải bắt đầu bằng cách chọn các điểm, mà bắt đầu bằng cách chọn hệ số góc mà bạn muốn thấy. Vì vậy, bạn bắt đầu bằng cách chọn hệ số góc. Chúng ta hãy gọi giá trị của hệ số góc là C. Vì vậy, bạn chọn một số. C bằng hai. Tôi muốn biết tất cả các điểm trong mặt phẳng mà ở đó hệ số góc của yếu tố đường thẳng bằng 2 nằm ở đâu? Vâng, chúng sẽ th ỏa mãn một phương trình.

The equation is f(x,y) = C, in general. So, what you do is plot this, plot the equation, plot this equation. Notice, it's not the differential equation. You can't exactly plot a differential equation. It's a curve, an ordinary curve. But which curve will depend; it's, in fact, from the 18.02 point of view, the level curve of C, sorry, it's a level curve of f of (x, y), the function f of x and y corresponding to the level of value C

Nói chung,phương trình là f (x, y) = C. Vì vậy, những gì bạn làm là vẽ đồ thị cái này, vẽ đồ thị phương trình, vẽ đồ thị phương trình này. Chú ý, nó không phải là phương trình vi phân. Bạn không thể vẽ chính xác đồ thị ph ương trình vi phân. Đó là một đường cong, một đường cong bình thường. Nhưng đường cong sẽ phụ thuộc vào cái gì; trên thực tế, nó xuất phát từ quan điểm của 18.02, đường mức C, xin lỗi, nó là một đường mức của f(x, y), hàm f của x và y tương ứng với mức giá trị C

But we are not going to call it that because this is not 18.02. Instead, we're going to call it an isocline. And then, you plot, well, you've done it. So, you've got this isocline, except I'm going to use a solution curve, solid lines, only for integral curves.

When we do plot isoclines, to indicate that they are not solutions, we'll use dashed lines for doing them. One of the computer things does and the other one doesn't. But they use different colors, also. There are different ways of telling you what's an isocline and what's the solution curve. So, and what do you do? So, these are all the points where the slope is going to be C.
Nhưng chúng tôi sẽ không gọi nó như thế bởi vì đây không phải là 18.02. Thay vào đó, chúng ta sẽ gọi nó là một đường đẳng tà. Và sau đó, bạn vẽ, vâng, bạn hoàn thành nó. ***Vì vậy, bạn đã có đường đẳng tà này,*** ngoại trừ tôi sẽ sử dụng một đường cong nghiệm, các đường liền nét, chỉ cho các đường cong tích phân. Khi chúng ta vẽ các đường đẳng tà, để chỉ ra rằng chúng không phải là nghiệm, chúng ta sẽ sử dụng các đường nét đứt để vẽ chúng. Một trong hai cái máy tính làm được còn cái còn lại thì không. Nhưng chúng cũng sử dụng những màu sắc khác nhau. Có nhiều cách khác nhau để nói cho bạn biết đường đẳng tà là gì và đường cong nghiệm là gì. À, và bạn làm gì? Vì vậy, đây là tất cả những điểm có hệ số góc bằng C.

And now, what you do is draw in as many as you want of line elements having slope C. Notice how efficient that is. If you want 50 million of them and have the time, draw in 50 million. If two or three are enough, draw in two or three. You will be looking at the picture. You will see what the curve looks like, and that will give you your judgment as to how you are to do that. So, in general, a picture drawn that way, so let's say, an isocline corresponding to C equals zero.
Và bây giờ, những gì bạn làm là vẽ thật nhiều như bạn muốn các yếu tố đường có độ dốc C. Chú ý đến tính hiệu quả. Nếu bạn muốn 50 triệu đường và có thời gian, hãy vẽ 50 triệu. Nếu hai hoặc ba là đủ, hãy vẽ hai hoặc ba. Bạn sẽ nhìn vào ảnh. Bạn sẽ thấy đường cong trông như thế nào, và nó sẽ cho bạn sự suy xét về cách thức để bạn làm điều đó. Vì vậy, nói chung, một bức tranh được vẽ theo cách đó, vì vậy, giả sử rằng, một đường đẳng tà tương ứng với C bằng không.

The line elements, and I think for an isocline, for the purposes of this lecture, it would be a good idea to put isoclines. Okay, so I'm going to put solution curves in pink, or whatever this color is, and isoclines are going to be in orange, I guess. So, isocline, represented by a dashed line, and now you will put in the line elements of, we'll need lots of chalk for that. So, I'll use white chalk.
Các yếu tố đường, và tôi nghĩ đối với một đường đẳng tà, đối với mục đích của bài giảng này, nó sẽ là một ý tưởng tốt để đặt các đường đẳng tà. Được rồi, do đó, tôi sẽ tô các đường cong nghiệm màu hồng, hoặc bất cứ màu sắc nào, và các đường đẳng tà có màu da cam, tôi đoán vậy. Vì vậy, các đường đẳng tà, được biểu diễn bằng các đường nét đứt, và bây giờ bạn sẽ đặt các yếu tố đường vào, chúng ta sẽ cần rất nhiều phấn cho điều đó. Vì vậy, tôi sẽ sử dụng phấn trắng.

Y horizontal? Because according to this the slope is supposed to be zero there. And at the same way, how about an isocline where the slope is negative one? Let's suppose here C is equal to negative one. Okay, then it will look like this. These are supposed to be lines of slope negative one. Don't shoot me if they are not. So, that's the principle. So, this is how you will fill up the plane to draw a direction field: by plotting the isoclines first.

Y ngang? Bởi vì theo đây hệ số góc được cho là bằng 0 ở đó. Và tương tự, các đường đẳng tà mà hệ số góc của nó bằng trừ 1 thì sao? Hãy giả sử ở đây C bằng trừ 1. Được rồi, sau đó nó sẽ trông như thế này. Đây là những đường được giả sử là có hệ số góc bằng trừ 1. Đừng bắn tôi, nếu chúng không phải. Vì vậy, đó là nguyên tắc. Vì vậy, đây là cách bạn sẽ làm đầy mặt phẳng để vẽ trường có hướng: bằng cách đầu tiên vẽ các đường đẳng tà.

And then, once you have the isoclines there, you will have line elements. And you can draw a direction field. Okay, so, for the next few minutes, I'd like to work a couple of examples for you to show how this works out in practice. So, the first equation is going to be y' = -x / y. Okay, first thing, what are the isoclines? Well, the isoclines are going to be y.

Và sau đó, một khi bạn có đường đẳng tà ở đó, bạn sẽ có các yếu tố đường. Và bạn có thể vẽ một trường có hướng. Được rồi, vì vậy, trong vài phút sau, tôi muốn xét một vài ví dụ để cho các bạn thấy điều này được tiến hành trong thực tế như thế nào . Vì vậy, phương trình đầu tiên sẽ là y '=-x / y. Được rồi, điều đầu tiên, các đường đẳng tà là gì? Vâng, các đường đẳng tà sẽ là y….

Well, -x / y = C. Maybe I better make two steps out of this. Minus x over y is equal to C. But, of course, nobody draws a curve in that form. You'll want it in the form y = -1 / C * x. So, there's our isocline. Why don't I put that up in orange since it's going to be, that's the color I'll draw it in. In other words, for different values of C, now this thing is aligned. It's aligned, in fact, through the origin. This looks pretty simple. Okay, so here's our plane. The isoclines are going to be lines through the origin. And now, let's put them in, suppose, for example, C is equal to one.

Vâng,-x / y = C. Có lẽ tốt hơn là tôi nên làm riêng hai bước ra ngoài đây. Trừ x trên y bằng C. Nhưng, tất nhiên, không ai vẽ một đường cong dưới dạng đó. Bạn sẽ muốn nó có dạng y= (-1 / C) * x. Vì vậy, đó là đường đẳng tà của chúng ta. Tại sao tôi không tô nó màu da cam vì nó sẽ là, đó là màu mà tôi đã vẽ nó. Nói cách khác, đối với các giá trị khác nhau của C, bây giờ cái này được sắp hàng. Nó được sắp hàng, trên thực tế, qua gốc tọa độ. Điều này có vẻ khá đơn giản. Được rồi, do đó, đây là mặt phẳng của chúng ta. Các đường đẳng tà sẽ là các đường đi qua gốc tọa độ. Và bây giờ, chúng ta hãy đặt chúng vào trong, giả sử, ví dụ, C bằng một.

Well, if C is equal to one, then it's the line, y equals minus x. So, this is the isocline. I'll put, down here, C equals minus one. And, along it, no, something's wrong. I'm sorry? C is one, not negative one, right, thanks. Thanks. So, C equals one. So, it should be little line segments of slope one will be the line elements, things of slope one. OK, now how about C equals negative one?

Vâng, nếu C bằng một, do đó nó là đường, y bằng trừ x. Vì vậy, đây là đường đẳng tà. Tôi sẽ đặt, dưới đây, C bằng trừ một. Và, dọc theo nó, không, có cái gì đó không ổn. Tôi xin lỗi? C là một, không phải trừ một, đúng không, cám ơn. Cảm ơn. Vì vậy, C bằng một. Vì vậy, có lẽ nên là những đoạn nhỏ với hệ số góc bằng 1 sẽ là những yếu tố đường, những cái có hệ số góc bằng một. Vâng, còn C bằng trừ một thì sao?

If C equals negative one, then it's the line, y = x. And so, that's the isocline. Notice, still dash because these are isoclines. Here, C is negative one. And so, the slope elements look like this. Notice, they are perpendicular. Now, notice that they are always going to be perpendicular to the line because the slope of this line is minus one over C. But, the slope of the line element is going to be C. Those numbers, minus one over C and C, are negative reciprocals. And, you know that two lines whose slopes are negative reciprocals are perpendicular. So, the line elements are going to be perpendicular to these. And therefore, I hardly even have to bother calculating, doing any more calculation. Here's going to be a, well, how about this one?

Nếu C bằng trừ một, thì đó là đường, y = x. Và như vậy, đó là đường đẳng tà. Chú ý, vẫn còn các đường nét đứt vì đây là những đường đẳng tà. Ở đây, C bằng trừ 1. Và như vậy, các yếu tố hệ số góc trông giống như thế này. Chú ý, chúng vuông góc. Bây giờ, chú ý rằng chúng sẽ luôn vuông góc với đường đẳng tà vì hệ số góc của đường này là trừ một trên C. Nhưng hệ số góc của yếu tố đường thẳng là C. Những con số này, trừ một trên C và C, nhân nhau bằng trừ 1. Và, bạn biết rằng hai đường mà hệ số góc của chúng nhân nhau bằng trừ 1 vuông góc nhau. Vì vậy, các yếu tố đường sẽ vuông góc với những cái này. Và do đó, tôi thậm chí hầu như không phải bận tâm tính toán, làm thêm bất cứ tính toán nào nữa. Đây sẽ là một, vâng, còn cái này thì sao?

Here's a controversial isocline. Is that an isocline? Well, wait a minute. That doesn't correspond to anything looking like this. Ah-ha, but it would if I put C multiplied through by C. And then, it would correspond to C being zero. In other words, don't write it like this. Multiply through by C. It will read C y = - x. And then, when C is zero, I have x equals zero, which is exactly the y-axis.

Dưới đây là một đường đẳng tà tinh tế. Đó là một đường đẳng tà phải không? Vâng, chờ một chút. Nó có vẻ không liên quan gì tới biểu thức này. Ah-ha, nhưng tôi sẽ chỉ ra chúng tương đương bằng cách nhân hai vế với C. Và bạn sẽ thấy, nó tương ứng với C bằng không. Nói cách khác, không viết nó như thế này. Nhân hai vế với C. Nó tương đương C y = - x. Và sau đó, khi C bằng không, tôi có x bằng không, nó chính là trục y.

So, that really is included. How about the x-axis? Well, the x-axis is not included. However, most people include it anyway. This is very common to be a sort of sloppy and bending the edges of corners a little bit, and hoping nobody will notice. We'll say that corresponds to C equals infinity. I hope nobody wants to fight about that. If you do, go fight with somebody else. So, if C is infinity, that means the little line segment should have infinite slope, and by common consent, that means it should be vertical. And so, we can even count this as sort of an isocline. And, I'll make the dashes smaller, indicate it has a lower status than the others. And, I'll put this in, do this weaselly thing of putting it in quotation marks to indicate that I'm not responsible for it.

Vì vậy, nó đúng là một đường đẳng tà. Còn trục x thì sao? Vâng, trục x không phải là đường đẳng tà. Tuy nhiên, dù sao đi nữa hầu hết mọi người đều tính đến nó. Điều này thông thường phần nào luộm thuộm và uốn các cạnh của các góc một ít, và hy vọng không ai sẽ chú ý. Nó tương ứng với C bằng vô cùng. Tôi hy vọng không ai muốn tranh luận về điều đó. Nếu muốn, hãy tranh luận với người khác. Vì vậy, nếu C bằng vô cùng, có nghĩa là các đoạn nhỏ sẽ có hệ số góc bằng vô cùng, và theo như sự đồng ý phổ biến, có nghĩa là nó sẽ nằm dọc. Và như vậy, chúng tôi thậm chí có thể tính cái này như là một loại đường đẳng tà. Và, tôi sẽ làm cho các dấu gạch ngang nhỏ hơn, chỉ ra nó có một tình trạng thấp hơn những cái khác. Và, tôi sẽ đặt cái này vào trong dấu ngoặc kép để cho biết rằng tôi không xét nó.

Okay, now, we now have to put it the integral curves. Well, nothing could be easier. I'm looking for curves which are everywhere perpendicular to these rays. Well, you know from geometry that those are circles. So, the integral curves are circles. And, it's an elementary exercise, which I would not deprive you of the pleasure of. Solve the ODE by separation of variables. In other words, we've gotten the, so the circles are ones with a center at the origin, of course, equal some constant. I'll call it C1, so it's not confused with this C. They look like that, and now you should solve this by separating variables, and just confirm that the solutions are, in fact, those circles.

Được rồi, bây giờ, chúng ta phải đặt nó vào đường cong tích phân. Vâng, không có gì dễ dàng hơn. Tôi đang tìm đường cong vuông góc với các tia này ở mọi nơi . Vâng, từ hình học bạn biết rằng đó là những đường tròn. Vì vậy, các đường cong tích phân là các đường tròn. Và, nó là một bài tập cơ bản, mà tôi sẽ không tước đi của các bạn niềm vui thích với nó. Giải phương trình vi phân thường bằng phương pháp tách biến. Nói cách khác, chúng ta đã nhận được các đường tròn là những cái mà tâm nằm tại gốc tọa độ, tất nhiên, bằng một hằng số nào đó. Tôi sẽ gọi nó là C1, do đó, nó không nhầm lẫn với C này. Chúng giống như thế này, và bây giờ bạn nên giải phương trình này bằng phương pháp tách biến, và chỉ cần xác nhận rằng trên thực tế, các nghiệm là những vòng tròn.

One interesting thing, and so I confirm this, I won't do it because I want to do geometric and numerical things today. So, if you solve it by separating variables, one interesting thing to note is that if I write the solution as y = y1(x), well, it'll look something like the sqrt (C1 - x^2). We'll make the x squared because that's the way people usually put the radius.

Một điều thú vị, và vì vậy tôi xác nhận điều này, tôi sẽ không làm điều đó vì tôi muốn làm những thứ hình học và số ngày hôm nay. Vì vậy, nếu bạn giải nó bằng cách tách các biến, một trong những điều thú vị cần lưu ý là nếu tôi viết những nghiệm là y = y1 (x), vâng, nó sẽ có dạng căn bậc hai của (C1 - x ^ 2). Chúng ta sẽ tạo ra x bình vì đó là cách người ta thường đặt bán kính.

And so, a solution, a typical solution looks like this. Well, what's the solution over here? Well, that one solution will be goes from here to here. If you like, it has a negative side to it. So, I'll make, let's say, plus. There's another solution, which has a negative value. But let's use the one with the positive value of the square root. My point is this, that that solution, the domain of that solution, really only goes from here to here. It's not the whole x-axis. It's just a limited piece of the x-axis where that solution is defined. There's no way of extending it further. And, there's no way of predicting, by looking at the differential equation, that a typical solution was going to have a limited domain like that.

Và vì vậy, nghiệm, nghiệm thông thường sẽ có dạng như thế này. Vâng, nghiệm trên đây là gì? Vâng, một nghiệm sẽ tương ứng với đồ thị từ đây đến đây. Nếu bạn thích, nó có một vế âm của nó. Vì vậy, tôi sẽ xét trường hợp dương. Có một nghiệm khác, trong đó có một giá trị âm. Nhưng chúng ta hãy sử dụng nghiệm với giá trị dương của căn bậc hai. Vấn đề của tôi ở đây, nghiệm đó, miền nghiệm đó, thực sự chỉ đi từ đây đến đây. Nó không phải toàn bộ trục x. Nó chỉ là phần giới hạn của trục x ở đó nghiệm đó được xác định. Không có cách nào để mở rộng nó thêm nữa. Và, không có cách nào để dự đoán, bằng cách nhìn vào phương trình vi phân, một nghiệm thông thường sẽ có một miền giới hạn giống như thế.

In other words, you could find a solution, but how far out is it going to go? Sometimes, it's impossible to tell, except by either finding it explicitly, or by asking a computer to draw a picture of it, and seeing if that gives you some insight. It's one of the many difficulties in handling differential equations. You don't know what the domain of a solution is going to be until you've actually calculated it.

Nói cách khác, bạn có thể tìm ra một nghiệm, nhưng nó sẽ đi xa ra ngoài bao nhiêu? Đôi khi, không thể nói được, ngoại trừ bằng cách hoặc tìm ra nó một cách rõ ràng, hoặc bằng cách yêu cầu một máy tính vẽ một hình ảnh của nó, và xem nó có cho bạn sự hiểu biết sâu sắc hay không. Đó là một trong rất nhiều khó khăn trong việc xử lý phương trình vi phân. Bạn không biết miền nghiệm sẽ là gì cho đến khi bạn thực sự đã tính toán nó.

Now, a slightly more complicated example is going to be, let's see, y' = 1 + x - y. It's not a lot more complicated, and as a computer exercise, you will work with, still, more complicated ones. But here, the isoclines would be what? Well, I set that equal to C. Can you do the algebra in your head? An isocline will have the equation: this equals C. So, I'm going to put the y on the right hand side, and that C on the left hand side. So, it will have the equation y = 1 + x - C, or a nicer way to write it would be y = x + 1 - C. I guess it really doesn't matter.

Bây giờ, một ví dụ phức tạp hơn một chút là, hãy xét phương trình, y '= 1 + x - y. Nó không phức tạp hơn nhiều, và như là một bài tập tính toán, bạn sẽ làm, vẫn còn, những bài phức tạp hơn. Nhưng ở đây, các đường đẳng tà sẽ là gì? Vâng, tôi đặt nó bằng C. Bạn có thể làm đại số trong đầu của bạn không? Một đường đẳng tà sẽ có phương trình: cái này bằng C. Vì vậy, tôi sẽ đặt y ở phía bên tay phải, và rằng C ở bên vế trái. Vì vậy, nó sẽ có phương trình y = 1 + x - C, hoặc một cách đẹp hơn để viết nó sẽ là y = x + 1 - C. Tôi đoán nó thực sự không quan trọng.

So there's the equation of the isocline. Let's quickly draw the direction field. And notice, by the way, it's a simple equation, but you cannot separate variables. So, I will not, today at any rate, be able to check the answer. I will not be able to get an analytic answer. All we'll be able to do now is get a geometric answer. But notice how quickly, relatively quickly, one can get it. So, I'm feeling for how the solutions behave to this equation.

Vì vậy, đó là phương trình của đường đẳng tà. Chúng ta hãy nhanh chóng vẽ ra trường có hướng. Và chú ý, nhân đây, đó là một phương trình đơn giản, nhưng bạn không thể tách biến. Vì vậy, tôi sẽ không, hôm nay ở bất cứ mức độ nào, có thể kiểm tra các câu trả lời. Tôi sẽ không thể nhận được một câu trả lời giải tích. Tất cả những gì chúng ta có thể làm bây giờ là nhận một câu trả lời hình học. Nhưng chú ý người ta có thể nhận nó nhanh như thế nào, tương đối nhanh. Vì vậy tôi cảm giác được các nghiệm của phương trình này hành vi như thế nào.

All right, let's see, what should we plot first? I like C equals one, no, don't do C equals one. Let's do C equals zero, first. C equals zero. That's the line. y = x + 1. Okay, let me run and get that chalk. So, I'll isoclines are in orange. If so, when C equals zero, y equals x plus one. So, let's say it's this curve. C equals zero. How about C equals negative one? Then it's y = x + 2. It's this curve. Well, let's label it down here. So, this is C equals negative one. C equals negative two would be y equals x, no, what am I doing?

Được rồi, chúng ta hãy xét, đầu tiên chúng ta sẽ vẽ gì? Tôi thích C bằng một, không, không chọn C bằng một. Chúng ta hãy chọn C bằng không. Đó là đường. y = x + 1. Được rồi, hãy để tôi chạy đi lấy phấn. Vì vậy, tôi sẽ tô đường đẳng tà màu da cam. Nếu vậy, khi C bằng không, y bằng x cộng một. Vì vậy, chúng ta giả sử rằng nó là đường cong này.C bằng không. Còn C bằng trừ một thì sao? Đó là đường y = x + 2. Nó là đường cong này. Vâng, chúng ta hãy đặt tên nó dưới đây.Vì vậy, đây là C bằng trừ 1. C bằng trừ hai sẽ là y bằng x, không, tôi sẽ làm gì?

C equals negative one is y = x + 2. That's right. Well, how about the other side? If C equals plus one, well, then it's going to go through the origin. It looks like a little more room down here. How about, so if this is going to be C equals one, then I sort of get the idea. C equals two will look like this. They're all going to be parallel lines because all that's changing is the y-intercept, as I do this thing. So, here, it's C equals two. That's probably enough. All right, let's put it in the line elements. All right, C equals negative one. These will be perpendicular. C equals zero, like this.
C bằng trừ một là y = x + 2. Đúng rồi. Vâng, còn vế kia thì sao? Nếu C bằng cộng một, vâng, do đó nó sẽ đi qua gốc tọa độ. Dường như có thêm một ít khoảng trống dưới đây. Còn, vì vậy nếu đây sẽ là C bằng một, do đó tôi phần nào nhận được một ý tưởng. C bằng hai sẽ trông như thế này. Tất cả chúng sẽ là những đường song song bởi vì tất cả sự thay đổi của nó là mặt phẳng y, như tôi làm điều này. Vì vậy, đây là đường đẳng tà C bằng hai. Điều đó có lẽ đủ. Được rồi, chúng ta hãy đặt các yếu tố đường thẳng vào. Được rồi, C bằng trừ một. Những cái này sẽ vuông góc. C bằng số không, giống như thế này.

C equals one. Oh, this is interesting. I can't even draw in the line elements because they seem to coincide with the curve itself, with the line itself. They write y along the line, and that makes it hard to draw them in. How about C equals two? Well, here, the line elements will be slanty. They'll have slope two, so a pretty slanty up. And, I can see if a C equals three in the same way. There are going to be even more slantier up. And here, they're going to be even more slanty down. This is not very scientific terminology or mathematical, but you get the idea. Okay, so there's our quick version of the direction field. All we have to do is put in some integral curves now. Well, it looks like it's doing this. It gets less slanty here. It levels out, has slope zero.
C bằng một. Ồ, điều này thú vị. Tôi không thể vẽ vào các yếu tố đường vì chúng trùng với chính đường cong, với chính đường này. Họ viết y dọc theo đường thẳng, và làm cho khó để vẽ chúng vào? Còn C bằng 2 thì sao? Vâng, ở đây, các yếu tố đường sẽ nghiêng. Chúng sẽ có hệ số góc bằng hai, do đó, hơi nghiêng lên. Và, tôi có thể hiểu C bằng ba theo cùng một cách. Thậm chí ở đó hệ số góc có thể tăng nhiều hơn. Và ở đây, chúng thậm chí sẽ nghiêng xuống. Đây không phải là thuật ngữ khoa học hoặc toán học, nhưng bạn sẽ có được ý tưởng. Được rồi, vì vậy đó là phiên bản nhanh của chúng ta về trường có hướng. Bây giờ, tất cả những gì chúng ta phải làm là đặt vào một số đường cong tích phân. Vâng, có vẻ như nó sẽ làm điều này. Nó trở nên ít nghiêng ở đây. Nó khựng lại, có hệ số góc bằng không.
And now, in this part of the plain, the slope seems to be rising. So, it must do something like that. This guy must do something like this. I'm a little doubtful of what I should be doing here. Or, how about going from the other side? Well, it rises, gets a little, should it cross this? What should I do? Well, there's one integral curve, which is easy to see. It's this one. This line is both an isocline and an integral curve.
Và bây giờ, trong phần bằng phẳng này, hệ số góc dường như đang tăng lên. Vì vậy, nó phải làm điều gì đó giống như thế này. Thằng này phải làm điều gì đó giống như thế này. Tôi hơi nghi ngờ về những gì tôi sẽ làm ở đây. Hoặc, còn đi sang phía khác thì sao? Vâng, nó tăng lên, được một chút, nó sẽ đi qua đây chứ? Tôi nên làm gì? Vâng, có một đường cong tích phân, rất dễ nhìn thấy. Đó là cái này. Đường này là một đường đẳng tà đồng thời cũng là đường cong tích phân.

It's everything, except drawable, [LAUGHTER] so, you understand this is the same line. It's both orange and pink at the same time. But I don't know what combination color that would make. It doesn't look like a line, but be sympathetic. Now, the question is, what's happening in this corridor? In the corridor, that's not a mathematical word either, between the isoclines for, well, what are they? They are the isoclines for C equals two, and C equals zero. How does that corridor look? Well: something like this. Over here, the lines all look like that. And here, they all look like this.
Đó là tất cả mọi thứ, ngoại trừ có thể kéo [CƯỜI] vì vậy, bạn thấy đây là đường tương tự. Nó có cả hai màu cam và màu hồng cùng một lúc. Nhưng tôi không biết sự kết hợp màu sẽ tạo ra cái gì. Nó không giống như một đường, nhưng được giao cảm. Bây giờ, câu hỏi đặt ra

là, điều gì xảy ra trong hành lang này? Trong hành lang, đó không phải là một thuật ngữ toán học, trong số các đường đẳng tà, tốt, chúng là gì? Chúng là các đường đẳng tà có C bằng hai, và C bằng không. Hành lang đó trông như thế nào? Vâng: cái gì đó như thế này. Ở đây, tất cả các đường đẳng tà giống như thế đó. Và ở đây, tất cả chúng đều giống như thế này.

The slope is two. And, a hapless solution gets in there. What's it to do? Well, do you see that if a solution gets in that corridor, an integral curve gets in that corridor, no escape is possible. It's like a lobster trap. The lobster can walk in. But it cannot walk out because things are always going in. How could it escape? Well, it would have to double back, somehow, and remember, to escape, it has to be, to escape on the left side, it must be going horizontally.

Hệ số góc bằng hai. Và, một nghiệm không may xuất hiện ở đây (chính là ở đây). Nó để làm gì? Vâng, bạn có thấy rằng nếu một nghiệm xuất hiện trong hành lang đó, một đường cong tích phân xuất hiện trong hành lang đó, có thể là không thoát ra. Nó giống như một cái bẫy tôm hùm. Tôm hùm có thể đi vào bên trong. Nhưng nó không thể đi ra ngoài bởi vì mọi thứ luôn luôn đi vào bên trong. Làm thế nào có thể thoát khỏi đó? Vâng, nó sẽ phải gập lưng lại, bằng cách nào đó, và nhớ, để thoát, nó có thể, để thoát ra bên trái, nó phải đi theo chiều ngang.

But, how could it do that without doubling back first and having the wrong slope? The slope of everything in this corridor is positive, and to double back and escape, it would at some point have to have negative slope. It can't do that. Well, could it escape on the right-hand side? No, because at the moment when it wants to cross, it will have to have a slope less than this line. But all these spiky guys are pointing; it can't escape that way either. So, no escape is possible. It has to continue on, there. But, more than that is true. So, a solution can't escape.

Tuy nhiên, làm thế nào nó có thể làm điều đó mà không gập lưng lại đầu tiên và có hệ số góc sai? Hệ số góc của mọi thứ trong hành lang này là dương, và gập lưng lại và thoát ra, nó sẽ ở một số điểm cần phải có hệ số góc âm. Nó không thể làm điều đó. Vâng, nó có thể thoát bên tay phải không? Không, bởi vì lúc này khi nó muốn đi qua, nó sẽ phải có độ dốc nhỏ hơn đường này. Nhưng tất cả những gã khó tính này đang hướng đến, nó không thể thoát ra đường đó. Vì vậy, không thoát ra là có thể. Nó phải tiếp tục đi, ở đó. Tuy nhiên, nhưng trên hết đó là sự thật. Vì vậy, một nghiệm không thể thoát ra.

Once it's in there, it can't escape. It's like, what do they call those plants, I forget, pitcher plants. All they hear is they are going down. So, it looks like that. And so, the poor little insect falls in. They could climb up the walls except that all the hairs are going the wrong direction, and it can't get over them. Well, let's think of it that way:

this poor trap solution. So, it does what it has to do. Now, there's more to it than that. Because there are two principles involved here that you should know, that help a lot in drawing these pictures. Principle number one is that two integral curves cannot cross at an angle. Two integral curves can't cross, I mean, by crossing at an angle like that. I'll indicate what I mean by a picture like that.

Sau khi đã vào đó, nó không thể thoát ra. Giống như là, họ gọi những loài thực vật này là gì, tôi quên, cây nắp ấm. Tất cả những gì chúng cảm thấy là chúng đang đi xuống. Vì vậy, nó trông như thế. Và như vậy, những con côn trùng tội nghiệp rơi vào trong đó. Chúng có thể leo lên thành nhưng tất cả các sợi lông đi sai hướng, và nó không thể vượt qua chúng. Vâng, chúng ta hãy nghĩ về nó như vậy: nghiệm bẫy tội nghiệp này. Vì vậy, nó làm những gì nó phải làm. Bây giờ, quá chính xác. Bởi vì có hai nguyên tắc liên quan ở đây mà bạn nên biết, có thể trợ giúp rất nhiều trong việc vẽ những bức ảnh này. Nguyên tắc số một là hai đường cong tích phân không thể qua một góc. Hai đường cong không thể đi qua, ý tôi là, bằng cách đi qua một góc như thế. Tôi sẽ chỉ ra những gì tôi muốn nói qua một bức ảnh giống như thế.

Now, why not? This is an important principle. Let's put that up in the white box. They can't cross because if two integral curves, are trying to cross, well, one will look like this. It's an integral curve because it has this slope. And, the other integral curve has this slope. And now, they fight with each other. What is the true slope at that point? Well, the direction field only allows you to have one slope. If there's a line element at that point, it has a definite slope. And therefore, it cannot have both the slope and that one. It's as simple as that. So, the reason is you can't have two slopes. The direction field doesn't allow it. Well, that's a big, big help because if I know, here's an integral curve, and if I know that none of these other pink integral curves are allowed to cross it, how else can I do it?

Bây giờ, tại sao không? Đây là một nguyên tắc quan trọng. Hãy khoanh tròn cái đó bằng phấn trắng. Chúng không thể đi qua bởi vì nếu hai đường cong tích phân, đang cố vượt qua, vâng, một cái sẽ trông giống như thế này. Nó là một đường cong tích phân bởi vì nó có hệ số góc này. Và, các đường cong tích phân khác có hệ số góc này. Và bây giờ, chúng đấu tranh với nhau. Hệ số góc thực sự tại điểm đó bằng bao nhiêu? Vâng, trường có hướng chỉ cho phép bạn có một hệ số góc. Nếu có một yếu tố đường tại điểm đó, nó có một hệ số góc nhất định. Và do đó, nó không thể có hai hệ số góc và cái đó. Nó đơn giản như thế đó. Vì vậy, lý do là bạn không thể có hai hệ số góc. Trường có hướng không cho phép nó. Vâng, đó là một sự trợ giúp lớn, giúp đỡ lớn, bởi vì nếu tôi biết, đây là một đường cong tích phân, và nếu tôi biết rằng không có cái nào trong những đường cong tích phân màu hồng khác này được phép đi qua nó, tôi còn có thể làm thế nào nữa?

Well, they can't escape. They can't cross. It's sort of clear that they must get closer and closer to it. You know, I'd have to work a little to justify that. But I think that nobody would have any doubt of it who did a little experimentation. In other words, all these curves joined that little tube and get closer and closer to this line, y = x. And there, without solving the differential equation, it's clear that all of these solutions, how do they behave? As x goes to infinity, they become asymptotic to, they become closer and closer to the solution, x. Is x a solution? Yeah, because y equals x is an integral curve.

Vâng, chúng không thể thoát ra. Chúng không thể đi qua. Rõ ràng rằng chúng phải ngày càng gần hơn với nó. Bạn biết, tôi phải làm việc một chút để biện minh cho điều đó. Nhưng tôi nghĩ rằng sẽ không ai có bất cứ sự nghi ngờ về nó những người đã làm một thử nghiệm nhỏ. Nói cách khác, tất cả những đường cong tụ vào ống nhỏ đó và ngày càng gần hơn với đường này, y = x. Và ở đó, không cần giải phương trình vi phân, thì rõ ràng chúng ta thấy các nghiệm sẽ như thế nào? Khi x đi đến vô cùng, chúng trở thành tiệm cận với, chúng trở nên ngày càng gần hơn với nghiệm x. x là một nghiệm phải không? Vâng, bởi vì y bằng x là một đường cong tích phân.

Is x a solution? Yeah, because if I plug in y equals x, I get what? On the right-hand side, I get one. And on the left-hand side, I get one. One equals one. So, this is a solution. Let's indicate that it's a solution. So, analytically, we've discovered an analytic solution to the differential equation, namely, Y equals X, just by this geometric process. Now, there's one more principle like that, which is less obvious. But you do have to know it. So, you are not allowed to cross. That's clear. But it's

much, much, much, much, much less obvious that two integral curves cannot touch. That is, they cannot even be tangent. Two integral curves cannot be tangent.
x là một nghiệm phải không? Vâng, bởi vì nếu tôi thế vào phương trình vi phân y bằng x, tôi nhận được những gì? Ở vế phải, tôi có một. Và ở vế trái, tôi cũng có một. Một bằng với một. Vì vậy, đây là một nghiệm. Chúng ta đã chứng tỏ rằng đó là một nghiệm. Vì vậy, về mặt giải tích, chúng ta đã phát hiện ra một nghiệm giải tích của phương trình vi phân, cụ thể là, y bằng x, chỉ bằng quy trình hình học này. Bây giờ, có thêm một nguyên tắc giống như thế, nó ít rõ ràng hơn. Nhưng bạn phải biết nó. Vì vậy, bạn không được phép bỏ qua. Điều đó rõ ràng. Nhưng rất rất ít hiển nhiên rằng hai đường cong tích phân không thể chạm nhau. Nghĩa là, chúng không thể tiếp xúc. Hai đường cong tích phân không thể tiếp xúc nhau.
I'll indicate that by the word touch, which is what a lot of people say. In other words, if this is illegal, so is this. It can't happen. You know, without that, for example, it might be, I might feel that there would be nothing in this to prevent those curves from joining. Why couldn't these pink curves join the line, y equals x? You know, it's a solution. They just pitch a ride, as it were. The answer is they cannot do that because they have to just get asymptotic to it, ever, ever closer. They can't join y equals x because at the point where they join, you have that situation.
Tôi sẽ chỉ ra rằng thông qua từ chạm, đó là những gì mà rất nhiều người nói. Nói cách khác, nếu điều này không hợp lệ, điều này cũng vậy. Nó không thể xảy ra. Bạn biết, không có điều đó, ví dụ, có thể là, tôi có thể cảm thấy rằng sẽ không có gì trong này để ngăn chặn những đường cong này tụ lại. Tại sao những đường cong màu hồng này không thể tụ lại vào đường y bằng x? Bạn đã biết, nó là một nghiệm. Chúng chỉ diễn tả một đường đi, khi điều đó đúng. Câu trả lời là chúng không thể làm điều đó, vì chúng phải tiệm cận với nó ngày càng gần hơn. Chúng không thể tụ vào đường y bằng x vì ở nơi mà chúng tụ vào, bạn có trường hợp đó.
Now, why can't you to have this? That's much more sophisticated than this, and the reason is because of something called the Existence and Uniqueness Theorem, which says that there is through a point, (x0, y0), that y prime equals y' = f(x, y) has only one, and only one solution. One has one solution. In mathematics speak, that means at least one solution. It doesn't mean it has just one solution. That's mathematical convention. It has one solution, at least one solution. But, the killer is, only one solution.
Bây giờ, tại sao bạn không thể có điều này? Cái đó phức tạp hơn nhiều so với cái này, và lý do là vì định lý tồn tại và duy nhất, nội dung của nó là qua một điểm, (x0, y0), ở đó y phẩy bằng y '= f (x, y) có một, và chỉ một nghiệm. Nó có một nghiệm. Theo ngôn ngữ toán học, điều đó có nghĩa là ít nhất là một nghiệm. Chứ không có nghĩa là chỉ có một nghiệm. Đó là quy ước toán học. Nó có một nghiệm, ít nhất là một nghiệm. Nhưng, kẻ giết người là, chỉ có một nghiệm.
That's what you have to say in mathematics if you want just one, one, and only one solution through the point (x0, y0). So, the fact that it has one, that is the existence

part. The fact that it has only one is the uniqueness part of the theorem. Now, like all good mathematical theorems, this one does have hypotheses. So, this is not going to be a course, I warn you, those of you who are theoretically inclined, very rich in hypotheses. But, hypotheses for those one or that f(x, y) should be a continuous function. Now, like polynomial, signs, should be continuous near, in the vicinity of that point.

Đó là những gì mà bạn phải nói trong toán học nếu bạn muốn diễn đạt chỉ một, một, và chỉ một nghiệm qua điểm (x0, y0). Vì vậy, sự kiện nó có một, đó là phần tồn tại. Sự kiện nó chỉ có một là phần duy nhất của định lý. Bây giờ, giống như tất cả các định lý toán học, cái này có những giả thuyết. Vì vậy, đây sẽ không phải khóa học rất giàu về giả thuyết, tôi cảnh báo những người trong số các bạn đang nghiêng về lý thuyết. Tuy nhiên, giả thuyết cho những cái này sẽ là f (x, y) phải là hàm liên tục. Bây giờ, giống như đa thức, các dấu, nên liên tục gần, ở vùng lân cận của điểm đó.

That guarantees existence, and what guarantees uniqueness is the hypothesis that you would not guess by yourself. Neither would I. What guarantees the uniqueness is that also, it's partial derivative with respect to y should be continuous, should be continuous near (x0, y0). Well, I have to make a decision. I don't have time to talk about Euler's method. I'll refer you to the, there's one page of notes, and I couldn't do any more than just repeat what's on those notes. So, I'll trust you to read that.

Điều đó đảm bảo sự tồn tại, và những gì đảm bảo tính duy nhất là giả thuyết mà bạn sẽ không tự đoán ra. Tôi cũng không. Những gì đảm bảo tính duy nhất cũng là, đạo hàm riêng phần của nó đối với y cần được liên tục, nên liên tục gần (x0, y0). Vâng, tôi phải đưa ra quyết định. Tôi không có thời gian để nói về phương pháp Euler. Tôi sẽ giới thiệu các bạn đến, có một trang ghi chú, và tôi không thể làm gì hơn là lặp lại những gì trên trang ghi chép này. Vì vậy, tôi sẽ tin bạn sẽ đọc nó.

And instead, let me give you an example which will solidify these things in your mind a little bit. I think that's a better course. The example is not in your notes, and therefore, remember, you heard it here first. Okay, so what's the example? So, there is that differential equation. Now, let's just solve it by separating variables. Can you do it in your head? dy over dx, put all the y's on the left. It will look like dy / (1 - y). Put all the dx's on the left. So, the dx here goes on the right, rather. That will be dx. And then, the x goes down into the denominator. So now, it looks like that.

Và thay vào đó, hãy để tôi cho bạn một ví dụ để củng cố những thứ này trong tâm trí bạn một ít. Tôi nghĩ đó là một khóa học tốt hơn. Ví dụ không có trong sách của các bạn, và do đó, hãy nhớ, bạn đã nghe nó ở đây lần đầu tiên. Được rồi, vậy ví dụ là gì? Vâng, đó là phương trình vi phân đó. Bây giờ, chúng ta chỉ giải nó bằng cách tách biến. Có thể bạn làm điều đó trong đầu của bạn? dy trên dx, đặt tất cả các y sang bên trái. Nó sẽ có dạng dy / (1 - y). Đặt tất cả các dx sang trái. Vì vậy, dx ở đây đi sang bên phải. Đó sẽ là dx. Và sau đó, những x đi xuống mẫu số. Vì vậy, bây giờ, nó có dạng như thế.

And, if I integrate both sides, I get the log of one minus y, I guess, maybe with a, I never bothered with that, but you can. It should be absolute values. All right, put an absolute value, plus a constant. And now, if I exponentiate both sides, the constant is positive. So, this is going to look like y. (1 - y) = x. And, the constant will be e^C1. And, I'll just make that a new constant, Cx. And now, by letting C be negative, that's why you can get rid of the absolute values, if you allow C to have negative values as well as positive values. Let's write this in a more human form. So, y = 1 - Cx. Good, all right, let's just plot those. So, these are the solutions.

Và, nếu tôi lấy tích phân cả hai vế, tôi được log của một trừ y, tôi đoán, có thể với một, tôi không bao giờ phiền hà về điều đó, nhưng bạn có thể. Nó nên là giá trị tuyệt đối. Được rồi, đặt vào dấu giá trị tuyệt đối, cộng một hằng số. Và bây giờ, nếu tôi mũ hóa cả hai vế, các hằng số là dương. Vì vậy, cái này sẽ có dạng y(1 - y) = x. Và, hằng số sẽ là e ^ C1. Nó là một hằng số mới, tôi đặt là Cx. Và bây giờ, bằng cách đặt C âm, đó là lý do tại sao bạn có thể để bỏ các giá trị tuyệt đối, nếu bạn cho phép C có giá trị âm cũng như giá trị dương. Hãy viết điều này dưới dạng nhân văn hơn. Như vậy, y = 1 - Cx. Tốt, được rồi, hãy vẽ đồ thị những cái này. Vì vậy, đây là những nghiệm.

It's a pretty easy equation, pretty easy solution method, just separation of variables. What do they look like? Well, these are all lines whose intercept is at one. And, they have any slope whatsoever. So, these are the lines that look like that. Okay, now let me ask, existence and uniqueness. Existence: through which points of the plane does the solution go? Answer: through every point of the plane, through any point here, I can find one and only one of those lines, except for these stupid guys here on the stalk of the flower. Here, for each of these points, there is no existence. There is no solution to this differential equation, which goes through any of these wiggly points on the y-axis, with one exception.

Đó là một phương trình khá dễ, phương pháp giải khá dễ dàng, chỉ cần tách biến. Chúng giống cái gì? Vâng, đây là tất cả những đường thẳng mà giao điểm của chúng tại điểm y bằng một. Và, chúng có hệ số góc bất kì. Vì vậy, đó là những đường giống như thế đó. Được rồi, bây giờ hãy để tôi yêu cầu, sự tồn tại và tính duy nhất. Sự tồn tại: điểm nào của mặt phẳng mà nghiệm đi qua? Trả lời: qua mọi điểm của mặt phẳng, qua bất kỳ điểm nào ở đây, tôi có thể tìm thấy một và chỉ một trong những đường này, ngoại trừ những kẻ ngu ngốc ở đây trên cuống của hoa. Ở đây, đối với mỗi điểm này, không có sự tồn tại. Không có nghiệm của phương trình vi phân này đi qua bất kỳ những điểm lăng quăng trên trục y, với một ngoại lệ.

This point is oversupplied. At this point, it's not existence that fails. It's uniqueness that fails: no uniqueness. There are lots of things which go through here. Now, is that a violation of the existence and uniqueness theorem? It cannot be a violation because the theorem has no exceptions. Otherwise, it wouldn't be a theorem. So, let's take a look. What's wrong? We thought we solved it modulo, putting the absolute value signs on the log. What's wrong? The answer: what's wrong is to use the theorem you must write the differential equation in standard form, in the green form I gave you. Let's write the differential equation the way we were supposed to. It says dy / dx = (1 - y) / x.

Điểm này được cung cấp quá mức. Tại điểm này, không phải là sự không tồn tại sai. Tính duy nhất của nó sai: không có tính duy nhất. Có rất nhiều thứ đi qua đây. Bây giờ, đó là một sự vi phạm định lí tồn tại và duy nhất phải không? Nó không thể là một sự vi phạm bởi vì định lí không có trường hợp ngoại lệ. Ngược lại, nó sẽ không phải là một định lí. Vì vậy, chúng ta hãy xem xét. Có gì đó không ổn? Chúng tôi nghĩ rằng chúng tôi đã giải nó theo modun, đặt dấu giá trị tuyệt đối trên log. Có gì đó không ổn? Câu trả lời: Những gì sai là để sử dụng định lý bạn phải viết các phương trình vi phân dưới dạng tiêu chuẩn, ở dạng màu xanh mà tôi cho bạn. Hãy viết phương trình vi phân theo cách mà chúng ta được phép. Có dạng dy / dx = (1 - y) / x.

And now, I see, the right-hand side is not continuous, in fact, not even defined when x equals zero, when along the y-axis. And therefore, the existence and uniqueness is not guaranteed along the line, x equals zero of the y-axis. And, in fact, we see that it failed. Now, as a practical matter, it's the way existence and uniqueness fails in all ordinary life work with differential equations is not through sophisticated examples that mathematicians can construct.

Và bây giờ, tôi thấy, vế phải không liên tục, quả thực, thậm chí không xác định khi x bằng không, tức là dọc theo trục y. Và do đó, tính tồn tại và duy nhất không được đảm bảo dọc theo đường, x bằng không của trục y. Và, trên thực tế, chúng ta thấy rằng nó sai. Bây giờ, như là một vấn đề thực tế, đó là cách mà tính tồn tại và duy nhất sai trong tất cả công việc đời sống bình thường với phương trình vi phân chứ không phải qua các ví dụ phức tạp do các nhà toán học tạo nên.

But normally, because f(x, y) will fail to be defined somewhere, and those will be the bad points. Thanks.

Nhưng bình thường, bởi vì f (x, y) sẽ không được xác định ở một nơi nào đó, và đó sẽ là những điểm xấu. Cảm ơn.