MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 24

Miền đơn liên – ôn tập
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

So, there's the third exam in this class will be on Thursday. I'm sure you already know. Just remind you, you will go to the usual place when there's an exam. Namely, if your last name starts with letter a to r, or if you're left handed, then you should go to Walker. And if you start with s to z, then you should come here. As usual, there's no documents, no calculators allowed. And, for those of you who can't make it, then you have to talk to us in advance. That there will be make-ups next week as usual, not on Monday because Monday is a holiday. Yea! [LAUGHTER] OK, the other piece of information is that I will have slightly extended office hours because I know a lot of you are anxious about the test.

Vâng, bài kiểm tra thứ ba của môn này sẽ được tổ chức vào thứ Năm. Tôi chắc rằng bạn đã biết. Các bạn cứ việc đến nơi thông thường khi thi. Cụ thể, nếu tên của bạn bắt đầu từ chữ a đến r, hoặc nếu bạn đang ở bên trái, thì bạn đến Walker. Và nếu tên bạn bắt đầu từ s đến z, thì bạn sẽ thi ở đây. Như thường lệ, không được phép mang tài liệu và máy tính. Và, nếu bạn nào không thể làm được, thì hãy nói trước với chúng tôi. Sẽ có make-ups trong tuần tới như bình thường, không phải ngày thứ hai bởi vì thứ hai là ngày nghỉ. Vâng! [Cười] Vâng, thông tin còn lại là tôi sẽ kéo dài giờ làm việc của tôi hơn một chút vì tôi biết rất nhiều bạn đang lo lắng về kỳ thi này.

So, today I will be in my office after class until 3:30, and tomorrow from 3:30-6:00. And, well let's see. So, before we actually start reviewing for the test, I still have to tell you a few small things because I promised to say a few words about what's the difference, or precisely, what's the difference between curl being zero and a field being a gradient field, and why we have this assumption that our vector field had to be defined everywhere for a field with curl zero to actually be conservative for our test for gradient fields to be valid? So –

Vì vậy, hôm nay tôi sẽ ở văn phòng của tôi sau giờ học đến 3:30, và ngày mai từ 3:30-06:00. Và, chúng ta hãy bắt đầu. Vâng, trước khi bắt đầu ôn tập thi, tôi phải nói với bạn vài điều nhỏ bởi vì tôi đã hứa sẽ nói với bạn vài điều về sự khác nhau, hay chính xác, sự khác biệt giữa curl bằng không và một trường là trường gradient, và tại sao chúng ta lại phải giả thuyết trường vector của chúng ta phải xác định ở mọi nơi đối với một trường có curl bằng không để là trường bảo toàn đối với bài kiểm tra của chúng ta cho các trường gradient hợp lệ? Vì vậy -

More about validity of Green's theorem and things like that. So, we've seen the statement of Green's theorem in two forms. Both of them have to do with comparing a line integral along a closed curve to a double integral over the region inside enclosed by the curve. So, one of them says the line integral for the work done by a vector field along a closed curve counterclockwise is equal to the double integral of a curl of a field over the enclosed region. And, the other one says the total flux out of the region, so, the flux through the curve is equal to the double integral of divergence of a field in the region.

Đề cập thêm về định lý Green và các thứ tương tự thế. Vì vậy, chúng ta đã thấy phát biểu của định lý Green dưới hai dạng. Cả hai đều so sánh tích phân đường dọc theo đường cong kín với tích phân kép trên vùng bên trong được bao bởi đường cong. Vâng, một trong số chúng phát biểu rằng tích phân đường đối với công được thực hiện bởi một trường vector dọc theo đường cong kín theo chiều ngược chiều kim đồng hồ bằng tích phân kép của curl của một trường trên vùng khép kín. Và, cái còn lại phát biểu thông lượng toàn phần chảy ra ngoài một vùng, vâng, thông lượng qua đường cong bằng tích phân kép của divergence của một trường trong vùng.

So, in both cases, we need the vector field to be defined not only, I mean, the left hand side makes sense if a vector field is just defined on the curve because it's just a line integral on C. We don't care what happens inside. But, for the right-hand side to make sense, and therefore for the equality to make sense, we need the vector field to be defined everywhere inside the region. So, I said, if there is a point somewhere in here where my vector field is not defined, then it doesn't work. And actually, we've seen that example. Oops.
Vì vậy, trong cả hai trường hợp, chúng ta cần các trường vectơ được xác định không chỉ, ý tôi là, ở vế trái sẽ có nghĩa nếu trường vector được xác định trên đường cong bởi vì nó chỉ là tích phân đường trên C. Chúng ta không quan tâm những gì xảy ra bên trong. Nhưng, để cho vế phải có nghĩa, và do đó để sự tương đương có nghĩa, trường vector cần phải được xác định ở mọi nơi bên trong vùng. Vì vậy, tôi đã nói, nếu có một điểm ở đâu đó quanh đây ở đó trường vector không xác định, thì nó không đúng. Và thực sự, chúng ta đã thấy ví dụ đó. Oops.

So, this only works if F and its derivatives are defined everywhere in the region, R. Otherwise, we are in trouble. OK, so we've seen for example that if I gave you the vector field minus yi xj over x squared plus y squared, so that's the same vector field that was on that problem set a couple of weeks ago. Then, well, f is not defined at the origin, but it's defined everywhere else. And, wherever it's defined, it's curl is zero.
Vì vậy, đây chỉ là công nếu F và đạo hàm của nó được xác định ở khắp mọi nơi trong vùng, R. Nếu không, chúng ta gặp rắc rối. Vâng, vì vậy chúng ta đã thấy ví dụ trong đó nếu tôi cho bạn trường vector trừ yi xj trên x bình cộng y bình, vì vậy đó là trường vector giống như trên xấp bài tập đó vài tuần trước. Thế thì, vâng, f không xác định ở gốc tọa độ, nhưng nó xác định ở mọi nơi khác. Và, bất cứ nơi nào nó xác định, curl của nó bằng không.

I should say everywhere it's -- And so, if we have a closed curve in the plane, well, there's two situations. One is if it does not enclose the origin. Then, yes, we can apply Green's theorem and it will tell us that it's equal to the double integral in here of curl F dA, which will be zero because this is zero. However, if I have a curve that encloses the origin, let's say like this, for example, then, well, I cannot use the same method because the vector field and its curl are not defined at the origin.

Tôi nên nói ở khắp mọi nơi nó - Và như vậy, nếu chúng ta có một đường cong khép kín trong mặt phẳng, vâng, có hai trường hợp. Một là nếu nó không bao quanh gốc tọa độ. Thế thì, đúng, chúng ta có thể áp dụng định lý Green và nó sẽ cho chúng ta biết rằng nó bằng tích phân kép ở đây của curl F dA, sẽ bằng không bởi vì cái này bằng không. Tuy nhiên, nếu tôi có một đường cong bao quanh gốc tọa độ, giả sử như thế này, ví dụ, thế thì, vâng, tôi không thể sử dụng phương pháp tương tự bởi vì trường vector và curl của nó không xác định tại gốc tọa độ.

And, in fact, you know that ignoring the problem and saying, well, the curl is still zero everywhere, will give you the wrong answer because we've seen an example. We've seen that along the unit circle the total work is 2 pi not zero. So, we can't use Green. However, we can't use it directly. So, there is an extended version of Green's theorem that tells you the following thing. Well, it tells me that even though I can't do things for just this region enclosed by C prime, I can still do things for the region in between two different curves.

Và, trên thực tế, bạn sẽ bỏ qua bài như thế và nói, vâng, các curl vẫn bằng không ở khắp mọi nơi, sẽ cho bạn câu trả lời sai bởi vì chúng ta đã thấy một ví dụ. Chúng ta đã thấy rằng dọc theo đường tròn đơn vị công toàn phần là 2 pi khác không. Vì vậy, chúng ta không thể dùng Green. Tuy nhiên, chúng ta không thể dùng nó trực tiếp. Vì vậy, có một phiên bản mở rộng của định lý Green cho bạn biết điều sau đây. Vâng, cho dù tôi không làm được mọi thứ chỉ trong vùng được bao bởi C phẩy, nhưng tôi vẫn có làm mọi thứ đối với vùng giữa hai đường cong khác nhau.

OK, so let me show you what I have in mind. So, let's say that I have my curve C'. Where's my yellow chalk? Oh, here. So, I have this curve C'. I can't apply Green's theorem inside it, but let's get out the smaller thing. So, that one I'm going to make going clockwise. You will see why. Then, I could say, well, let me change my mind. This picture is not very well prepared. That's because my writer is on strike. OK, so let's say we have C' and C'' both going counterclockwise.

Vâng, vì vậy hãy để tôi chỉ cho bạn những gì tôi có trong tâm trí. Vâng, giả sử rằng tôi có đường cong C '. Phấn vàng đâu rồi? Oh, ở đây. Vâng, tôi có đường cong C ' này. Tôi không thể áp dụng định lý Green bên trong nó, nhưng chúng ta hãy rút ra một nhận xét nho nhỏ. Vâng, tôi giả sử nó đi cùng chiều kim đồng hồ. Bạn sẽ thấy tại sao. Thế thì, tôi có thể nói, vâng, hãy để tôi thay đổi một chút. Hình này không được chuẩn bị tốt. Đó là bởi vì thư kí của tôi đình công. Vâng, vì vậy giả sử rằng chúng ta có cả C' và C'' đều đi ngược chiều kim đồng hồ.

Then, I claim that Green's theorem still applies, and tells me that the line integral along C prime minus the line integral along C double prime is equal to the double integral over the region in between. So here, now, it's this region with the hole of the curve. And, well, in our case, that will turn out to be zero because curl is zero. OK, so this doesn't tell us what each of these two line integrals is. But actually, it tells us that they are equal to each other. And so, by computing one, you can see actually that for this vector field, if you take any curve that goes counterclockwise around the origin, you would get two pi no matter what the curve is.

Thế thì, tôi cho rằng định lý Green vẫn còn áp dụng được, và cho tôi biết rằng tích phân đường dọc theo C phẩy trừ tích phân đường dọc theo C hai phẩy bằng với tích phân kép trên vùng ở giữa. Vì vậy, ở đây, bây giờ, nó là vùng này nằm giữa hai đường cong. Và, vâng, trong trường hợp của chúng ta, hóa ra nó bằng không vì curl bằng không. Vâng, vì vậy điều này không cho chúng ta biết mỗi tích phân đường này bằng gì. Nhưng trên thực tế, nó cho chúng ta biết chúng bằng nhau. Và như vậy, bằng cách tính một cái, bạn có thể thấy điều đó đối với trường vector này, nếu bạn lấy bất kì đường cong nào đi ngược chiều kim đồng hồ bao quanh gốc tọa độ, bạn sẽ nhận được hai pi bất kể đường cong là gì.

So how do you get to this? Why is this not like conceptually a new theorem? Well,

just think of the following thing. I'm not going to do it on top of that because it's going to be messy if I draw too many things. But, so here I have my C''. Here, I have C'. Let me actually make a slit that will connect them to each other like this. So now if I take, see, I can form a single closed curve that will enclose all of this region with kind of an infinitely thin slit here counterclockwise. And so, if I go counterclockwise around this region, basically I go counterclockwise along the outer curve. Then I go along the slit.
Vâng, tại sao như vậy? Tại sao về mặt khái niệm cái này không phải là định lí mới? Vâng, chỉ cần xét những điều sau đây. Tôi sẽ không vẽ trên hình đó vì nó sẽ bừa bộn nếu tôi vẽ quá nhiều thứ. Nhưng, vì vậy ở đây tôi có C’’ của tôi. Ở đây, tôi có C '. Hãy để tôi tạo ra một khe nối chúng với nhau như thế này. Vì vậy, bây giờ nếu tôi dùng, xem nào, tôi có thể hình thành một đường cong khép kín sẽ bao quanh tất cả vùng này với một khe vô cùng mỏng ở đây ngược chiều kim đồng hồ. Và như vậy, nếu tôi đi ngược chiều kim đồng hồ quanh vùng này, về cơ bản tôi đi ngược chiều kim đồng hồ dọc theo đường cong bên ngoài. Sau đó tôi đi dọc theo khe.

Then I go clockwise along the inside curve, then back along the slit. And then I'm done. So, if I take the line integral along this big curve consisting of all these pieces, now I can apply Green's theorem to that because it is the usual counterclockwise curve that goes around a region where my field is well-defined. See, I've eliminated the origin from the picture. And, so the total line integral for this thing is equal to the integral along C prime, I guess the outer one. Then, I also need to have what I do along the inner side. And, the inner side is going to be C double prime, but going backwards because now I'm going clockwise on C prime so that I'm going counterclockwise around the shaded region.
Sau đó, tôi đi cùng chiều kim đồng hồ dọc theo đường cong bên trong, sau đó trở lại dọc theo khe. Và cuối cùng tôi hoàn thành. Vì vậy, nếu tôi tính tích phân đường dọc theo đường cong lớn này bao gồm tất cả các đoạn này, bây giờ tôi có thể áp dụng định lý Green cho nó vì nó là đường cong ngược chiều kim đồng hồ bình thường bao quanh gốc tọa độ ở đó trường xác định. Thấy không, tôi đã loại gốc tọa độ ra khỏi hình. Và, vì vậy tích phân đường tổng cộng cho cái này bằng với tích phân đường dọc theo C phẩy, là cái bên ngoài. Sau đó, tôi cũng cần phải có những gì tôi làm dọc theo phía bên trong. Và, phía bên trong sẽ là C hai phẩy, nhưng sẽ ngược lại bởi vì bây giờ tôi đang đi cùng chiều kim đồng hồ trên C phẩy vì thế tôi sẽ đi ngược chiều kim đồng hồ quanh vùng được tô.

Well, of course there will be contributions from the line integral along this wide segment. But, I do it twice, once each way. So, they cancel out. So, the white segments cancel out. You probably shouldn't, in your notes, write down white segments because probably they are not white on your paper. But, hopefully you get the meaning of what I'm trying to say. OK, so basically that tells you, you can still play tricks with Green's theorem when the region has holes in it. You just had to be careful and somehow subtract some other curve so that together things will work out. There is a similar thing with the divergence theorem, of course, with flux and double integral of div f, you can apply exactly the same argument.

Vâng, tất nhiên sẽ có sự đóng góp từ tích phân đường của hai đoạn nhỏ này. Nhưng, tôi đi qua nó hai lần, theo các đường ngược nhau. Vì vậy, chúng triệt tiêu nhau. Vì vậy, các đoạn trắng triệt tiêu nhau. Có lẽ bạn không cần, trong vở của bạn, viết ra các đoạn trắng vì có thể bạn không dùng mực màu. Tuy nhiên, hy vọng bạn hiểu được ý tôi. Vâng, do đó, về cơ bản điều đó cho bạn biết, bạn vẫn còn có thể thực hiện các thủ thuật với định lý Green khi vùng có lổ bên trong nó. Bạn chỉ cần cẩn thận và trừ đường cong nào đó để cho các thứ cùng nhau hợp lệ. Có một điều tương tự với định lý divergence, tất nhiên, với thông lượng và tích phân kép của div f, bạn có thể lí luận tương tự.

OK, so basically you can apply Green's theorem for a region that has several boundary curves. You just have to be careful that the outer boundary must go counterclockwise. The inner boundary either goes clockwise, or you put a minus sign. OK, and the last cultural note, so, the definition, we say that a region in the plane, sorry, I should say a connected region in the plane, so that means -- So, connected means it consists of a single piece. OK, so, connected, there is a single piece. These two guys together are not connected. But, if I join them, then this is a connected region. We say it's simply connected –

Vâng, do đó, về cơ bản bạn có thể áp dụng định lý Green cho vùng có vài đường cong biên. Bạn chỉ cần chú ý là biên ngoài phải đi ngược chiều kim đồng hồ. Các biên trong hoặc là đi cùng chiều kim đồng hồ, hoặc bạn đặt một dấu trừ. Vâng , và chú thích cuối cùng là, vâng, định nghĩa, chúng ta nói rằng một vùng trong mặt phẳng, xin lỗi, tôi nên nói vùng liên kết trong mặt phẳng, do đó điều đó có nghĩa là - Vâng, liên kết có nghĩa là nó bao gồm một đoạn duy nhất. Vâng, vì vậy, liên kết, có một đoạn duy nhất. Hai thằng này không được liên kết với nhau. Nhưng, nếu tôi nối chúng, thì đây là vùng được liên kết. Chúng ta nói nó đơn liên -

-- if any closed curve in it, OK, so I need to gave a name to my region, let's say R, any closed curve in R, bounds, no, sorry. If the interior of any closed curve in R -- -- is also contained in R. So, concretely, what does that mean? That means the region, R, does not have any holes inside it. Maybe I should draw two pictures to explain what I mean. So, this guy here is simply connected while –

- nếu bất kì đường cong khép kín nào trong nó, vâng, vì vậy tôi cần đặt tên cho vùng của tôi, giả sử là R, bất kỳ đường cong kín nào trong R, các biên, không, xin lỗi. Nếu phần trong của bất kì đường cong kín nào trong R - -cũng đươc chứa trong R. Vâng, cụ thể, điều đó có nghĩa là gì? Điều đó có nghĩa là vùng, R, không có bất kỳ lỗ nào bên trong nó. Có lẽ tôi nên vẽ ra hai hình để giải thích. Vâng, thằng này ở đây là đơn liên trong khi -

-- this guy here is not simply connected because if I take this curve, that's a curve inside my region. But, the piece that it bounds is not actually entirely contained in my origin. And, so why is that relevant? Well, if you know that your vector field is defined everywhere in a simply connected region, then you don't have to worry about this question of, can I apply Green's theorem to the inside? You know it's automatically OK because if you have a closed curve, then the vector field is, I mean, if a vector field is defined on the curve it will also be defined inside.

- thằng này ở đây là không đơn liên bởi vì nếu tôi chọn đường cong này, đó là một đường cong bên trong vùng của tôi. Tuy nhiên, các đoạn mà nó bao không được chứa hoàn toàn trong vùng ban đầu của tôi. Và, tại sao điều đó thích đáng? Vâng, nếu bạn biết trường vector của bạn được xác định ở khắp mọi nơi trong vùng đơn liên, thì bạn không cần phải lo lắng về câu hỏi này, tôi có thể áp dụng định lý Green cho bên trong hay không? Bạn biết nó tự động OK bởi vì nếu bạn có một đường cong khép kín, thì trường vector là, ý tôi là, nếu trường vector được xác định trên đường cong nó cũng sẽ được xác định bên trong.

OK, so if the domain of definition -- -- of a vector field is defined and differentiable --

-- is simply connected -- -- then we can always apply -- -- Green's theorem -- -- and, of course, provided that we do it on a curve where the vector field is defined. I mean, your line integral doesn't make sense so there's nothing to compute. But, if you have, so, again, the argument would be, well, if a vector field is defined on the curve, it's also defined inside.
Vâng, vì vậy nếu miền xác định - - của một trường vector được xác định và khả vi -- đơn liên - - thì chúng ta luôn luôn có thể áp dụng - - định lý Green - -và, tất nhiên, với điều kiện là chúng ta làm điều đó trên đường cong mà trường vector xác định. Ý tôi là, tích phân đường không có nghĩa vì vậy không có gì để tính. Nhưng, nếu bạn có, vâng, một lần nữa, lí luận sẽ là, vâng, nếu một trường vector được xác định trên đường cong, nó cũng được xác định bên trong.

So, see, the problem with that vector field here is precisely that its domain of definition is not simply connected because there is a hole, namely the origin. OK, so for this guy, domain of definition, which is plane minus the origin with the origin removed is not simply connected. And so that's why you have this line integral that makes perfect sense, but you can't apply Green's theorem to it. So now, what does that mean a particular? Well, we've seen this criterion that if a curl of the vector field is zero and it's defined in the entire plane, then the vector field is conservative, and it's a gradient field.
Vì vậy, thấy không, bài tập với trường véc tơ ở đây đúng là miền xác định của nó không đơn liên bởi vì có một lổ, cụ thể là gốc tọa độ. Vâng, do đó thằng này, miền xác định, đó là mặt phẳng trừ gốc tọa độ với gốc tọa độ được di chuyển không đơn liên. Và vì vậy đó là lý do tại sao bạn có tích phân đường có ý nghĩa hoàn hảo, nhưng bạn không thể áp dụng định lý Green cho nó. Vì vậy, bây giờ, điều đó có ý nghĩa cụ thể gì không? Vâng, chúng ta đã thấy tiêu chuẩn trong đó nếu curl của trường vector bằng không và nó được xác định trong toàn bộ mặt phẳng, thì trường vector bảo toàn, và đó là một trường gradient.

And, the argument to prove that is basically to use Green's theorem. So, in fact, the actual optimal statement you can make is if a vector field is defined in a simply connected region, and its curl is zero, then it's a gradient field. So, let me just write that down. So, the correct statement, I mean, the previous one we've seen is also correct. But this one is somehow better and closer to what exactly is needed if curl F is zero and the domain of definition where F is defined is simply connected –
Và, lí luận để chứng minh điều đó về cơ bản là dùng định lí Green. Vì vậy, trên thực tế, phát biểu tối ưu thực sự bạn có thể tạo ra là nếu một trường vector được xác định trong một vùng đơn liên, và curl của nó bằng không, thì đó là một trường gradient. Vì vậy, hãy để tôi viết điều đó ra. Vì vậy, phát biểu chính xác, ý tôi là, cái trước mà chúng ta đã thấy cũng chính xác. Nhưng điều này có vẻ tốt hơn và gần hơn với những gì được cần nếu curl F bằng không và miền xác định trong đó F được xác định là đơn liên -

-- then F is conservative. And that means also it's a gradient field. It's the same thing. OK, any questions on this? No? OK, some good news. What I've just said here won't come up on the test on Thursday. OK. (APPLAUSE) Still, it's stuff that you

should be aware of generally speaking because it will be useful, say, on the next week's problem set. And, maybe on the final it would be, there won't be any really, really complicated things probably, but you might need to be at least vaguely aware of this issue of things being simply connected.
- thì F bảo toàn. Và điều đó cũng có nghĩa là đó là một trường gradient. Đó là thứ tương tự. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về điều này không? Không có à? Được rồi, một số tin tốt. Những gì tôi đã nói ở đây sẽ không xuất hiện trong bài kiểm tra vào thứ Năm. Vâng. (Vỗ tay) Tuy nhiên, nó là thứ mà bạn cần phải nhận thức nói chung bởi vì nó có ích, chẳng hạn như, trên xấp bài tập của tuần tiếp theo. Và, có lẽ vào kì thi cuối kì sẽ có, nhưng sẽ không có bất kỳ những thứ thực sự, thực sự phức tạp, nhưng bạn ít nhất cần phải có nhận thức sơ lược về vấn đề đơn liên.

And by the way, I mean, this is also somehow the starting point of topology, which is the branch of math that studies the shapes of regions. So, in particular, you can try to distinguish domains in the plains by looking at whether they're simply connected or not, and what kinds of features they have in terms of how you can joint point what kinds of curves exist in them. And, since that's the branch of math in which I work, I thought I should tell you a bit about it.
Và qua đây, tôi muốn nói, đây cũng là điểm bắt đầu của topo, nó là một nhánh của toán học nghiên cứu các vùng. Vì vậy, đặc biệt, bạn có thể thử phân biệt các miền trong mặt phẳng bằng cách quy cho chúng hoặc là đơn liên hoặc là không, và chúng có loại tính chất nào phụ thuộc vào cách bạn nối điểm loại đường cong nào tồn tại trong chúng. Và, vì chuyên môn của tôi là chủ đề đó, nên tôi nghĩ tôi sẽ nói cho bạn một chút về nó.

OK, so now back to reviewing for the exam. So, I'm going to basically list topics. And, if time permits, I will say a few things about problems from practice exam 3B. I'm hoping that you have it or your neighbor has it, or you can somehow get it. Anyway, given time, I'm not sure how much I will say about the problems in and of themselves. OK, so the main thing to know about this exam is how to set up and evaluate double integrals and line integrals. OK, if you know how to do these two things, then you are in much better shape than if you don't.
Được rồi, vậy bây giờ quay lại phần ôn tập cho bài thi. Vâng, tôi sẽ điểm qua danh sách các chủ đề. Và, nếu thời gian cho phép, tôi sẽ nói vài điều về các bài tập trong bài thi thử 3B. Tôi hy vọng rằng bạn có nó hoặc người ngồi cạnh bạn có nó, hoặc bạn có thể lấy nó bằng cách nào đó. Dù sao đi nữa, với thời gian định trước, tôi không chắc tôi sẽ nói được bao nhiêu về các bài tập. Vâng, do đó điều chủ yếu cần biết về bài thi là cách thiết lập và tính tích phân kép và tích phân đường. Vâng, nếu bạn biết cách tính hai cái đó, thì bạn sẽ thi tốt hơn.

And -- So, the first thing we've seen, just to write it down, there's two main objects. And, it's kind of important to not confuse them with each other. OK, there's double integrals of our regions of some quantity, dA, and the other one is the line integral along a curve of a vector field, F.dr or F.Mds depending on whether it's work or flux that we are trying to do. And, so we should know how to set up these things and how to evaluate them. And, roughly speaking, in this one you start by drawing a picture of the region, then deciding which way you will integrate it.
Và - Vì vậy, điều đầu tiên chúng ta đã thấy, chỉ cần viết nó ra, có hai đối tượng chính. Và, đừng lẫn lộn chúng với nhau. Vâng, đó là tích phân kép trên vùng nào đó của đại lượng nào đó, dA, và cái kia là tích phân đường dọc theo đường cong của trường vector, F.dr hoặc F. Mds tuỳ thuộc vào việc nó là công hay thông lượng mà chúng ta thử làm. Và, do đó, chúng ta nên biết cách thiết lập những thứ này và cách tính chúng. Và, nói một cách gần đúng, trong cái này, bạn bắt đầu bằng cách vẽ hình của vùng, sau đó quyết định xem bạn sẽ lấy tích phân nó theo cách nào.

It could be dx dy, dy dx, r dr d theta, and then you will set up the bound carefully by slicing it and studying how the bounds for the inner variable depend on the outer variable. So, the first topic will be setting up double integrals. And so, remember, OK, so maybe I should make this more explicit. We want to draw a picture of R and

take slices in the chosen way so that we get an iterated integral. OK, so let's do just a quick example. So, if I look at problem one on the exam 3B, it says to look at the line integral from zero to one,
Nó có thể là dx dy, dy dx, r dr d theta, và sau đó bạn sẽ thiết lập cận cẩn thận bằng cách cắt nó và nghiên cứu các cận như thế nào đối với biến bên trong phụ thuộc vào biến bên ngoài. Vì vậy, chủ đề đầu tiên sẽ là thiết lập các tích phân kép. Và vì vậy, hãy nhớ, vâng, như vậy có lẽ tôi nên làm cho cái này rõ ràng. Chúng ta cần vẽ hình của R và chọn các mặt cắt theo cách được chọn sao cho chúng ta nhận được tích phân lặp. Vâng, chúng ta hãy xét một ví dụ nhỏ. Vì vậy, nếu tôi xét bài tập một trong bài kiểm tra 3B, yêu cầu tính tích phân đường từ không đến một,

line integral from x to 2x of possibly something, but dy dx. And it says, let's look at how we would set this up the other way around by exchanging x and y. So, we should get to something that will be the same integral dx dy. I mean, if you have a function of x and y, then it will be the same function. But, of course, the bounds change. So, how do we exchange the order of integration? Well, the only way to do it consistently is to draw a picture. So, let's see, what does this mean? Here, it means we integrate from y equals x to y equals 2x, x between zero and one. So, we should draw a picture.
Tích phân đường từ x đến 2x của cái gì đó, nhưng dy dx. Và nó nói, hãy xem chúng ta sẽ thiết lập cái này theo cách khác như thế nào bằng cách hoán đổi x và y. Vì vậy, chúng ta sẽ được thứ gì đó giống như tích phân dx dy. Ý tôi là, nếu bạn có hàm của x và y, thì nó sẽ là hàm tương tự. Nhưng, tất nhiên, các cận thay đổi. Vậy, chúng ta hoán đổi thứ tự tích phân như thế nào? Vâng, cách duy nhất để làm điều đó luôn là vẽ hình. Vì vậy, xem nào, điều này có nghĩa là gì? Ở đây, nó có nghĩa là chúng ta lấy tích phân từ y bằng x đến y bằng 2x, x giữa không và một. Vì vậy, chúng ta sẽ vẽ một hình.

The lower bound for y is y equals x. So, let's draw y equals x. That seems to be here. And, we'll go up to y equals 2x, which is a line also but with bigger slope. And then, all right, so for each value of x, my origin will go from x to 2x. Well, and I do this for all values of x that go to x equals one. So, I stop at x equals one, which is here. And then, my region is something like this. OK, so this point here, in case you are wondering, well, when x equals one, y is one. And that point here is one, two. OK, any questions about that so far?

Cận dưới của y là y bằng x. Vì vậy, chúng ta hãy vẽ y bằng x. Có vẻ như nó giống thế này. Và, chúng ta sẽ đi đến y bằng 2x, nó cũng là một đường thẳng nhưng hệ số góc lớn hơn. Và sau đó, được rồi, do đó đối với mỗi giá trị của x, vùng của tôi sẽ đi từ x đến 2x. Vâng, và tôi sẽ làm điều này cho tất cả các giá trị của x đi từ x bằng một. Vì vậy, tôi dừng tại x bằng một, ở đây. Và sau đó, vùng của tôi là thứ gì đó giống như thế này. Vâng, do đó điểm này ở đây, trong trường hợp bạn đang tự hỏi, vâng, khi x bằng một, y bằng một. Và điểm đó ở đây là một, hai. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về điều đó không?

OK, so somehow that's the first kill, when you see an integral, how to figure out what it means, how to draw the region. And then there's a converse scale which is given the region, how to set up the integral for it. So, if we want to set up instead dx dy, then it means we are going to actually look at the converse question which is, for a given value of y, what is the range of values of x? OK, so if we fix y, well, where do we enter the region, and where do we leave it? So, we seem to enter on this side, and we seem to leave on that side. At least that seems to be true for the first few values of y that I choose. But, hey, if I take a larger value of y, then I will enter on the side, and I will leave on this vertical side, not on that one. So, I seem to have two different things going on. OK, the place where enter my region is always y equals 2x, which is the same as x equals y over two.
Vâng, vì vậy đó là kĩ năng thứ nhất, khi bạn gặp một tích phân, làm thế nào để biết ý nghĩa của nó, cách vẽ miền lấy tích phân. Và sau đó có một thang chuyển đổi ngược được cho trong vùng, làm thế nào để thiết lập tích phân cho nó. Vì vậy, thay vì nếu chúng ta muốn thiết lập dx dy, thế thì nó có nghĩa là chúng ta sẽ xét câu hỏi ngược lại đó là, đối với một giá trị nhất định của y, khoảng giá trị của x là gì? Vâng, vì vậy nếu chúng ta giữ y không đổi, vâng, chúng ta đi vào vùng ở đâu, và chúng ta rời khỏi nó ở đâu? Vì vậy, chúng ta dường như đi vào phía này,và dường như chúng ta rời khỏi phía đó. Ít nhất điều đó có vẻ là đúng đối với các giá trị đầu tiên của y mà tôi chọn. Nhưng, hey, nếu tôi lấy giá trị lớn hơn của y,thì tôi sẽ vào ở một phía, và tôi sẽ rời khỏi ở phía thẳng đứng này, không phải cái đó. Vì vậy, dường như tôi có hai thứ khác nhau xảy ra. Vâng, nơi vào vùng luôn luôn là y bằng 2x, tương đương x bằng y trên hai.

So, x seems to always start at y over two. But, where I leave to be either x equals y, or here, x equals y. And, that depends on the value of y. So, in fact, I have to break this into two different integrals. I have to treat separately the case where y is between zero and one, and between one and two. So, what I do in that case is I just make two integrals. So, I say, both of them start at y over two. But, in the first case, we'll stop at x equals y. In the second case, we'll stop at x equals one. OK, and now, what are the values of y for each case? Well, the first case is when y is between zero and one.
Vì vậy, x dường như luôn bắt đầu tại y trên hai. Nhưng, nơi tôi rời khỏi hoặc là x bằng y, hoặc ở đây, x bằng y. Và, điều đó phụ thuộc vào giá trị của y. Vì vậy, trên thực tế, tôi phải chia vùng thành hai tích phân khác nhau. Tôi phải xét riêng trường hợp y nằm giữa không và một, và giữa một và hai. Vì vậy, những gì tôi làm trong trường hợp đó là tôi tính hai tích phân. Vì vậy, tôi nói, cả hai đều bắt đầu tại y trên hai. Nhưng, trong trường hợp đầu tiên, chúng ta sẽ dừng lại tại x bằng y. Trong trường hợp thứ hai, chúng ta sẽ dừng lại ở x bằng một. Vâng, và bây giờ, giá trị của y trong mỗi trường hợp là gì? Vâng, trường hợp đầu tiên là khi y nằm giữa không và một.

The second case is when y is between one and two, which I guess this picture now is completely unreadable, but hopefully you've been following what's going on, or else you can see it in the solutions to the problem. And, so that's our final answer. OK, any questions about how to set up double integrals in xy coordinates? No? OK, who feels comfortable with this kind of problem? OK, good. I'm happy to see the vast majority. So, the bad news is we have to be able to do it not only in xy coordinates, but also in polar coordinates.
Trường hợp thứ hai là khi y đi từ một đến hai, mà hiện tại tôi đoán hình này khó thấy, nhưng hy vọng bạn sẽ theo dõi được những gì đang xảy ra, hoặc cái gì khác bạn có thể thấy trong nghiệm của bài toán. Và, do đó, đó là câu trả lời cuối cùng của chúng ta. Vâng, có ai thắc mắc về cách thiết lập các tích phân kép trong các tọa độ xy? Không có à? Vâng, ai cảm thấy thoải mái với loại bài tập này? Vâng, tốt. Tôi vui khi thấy đại đa số. Vì vậy, tin xấu là chúng ta phải làm được nó không chỉ trong các tọa độ xy, mà còn trong tọa độ cực.

So, when you go to polar coordinates, basically all you have to remember on the side of integrand is that x becomes r cosine theta. Y becomes r sine theta. And, dx dy becomes r dr d theta. In terms of how you slice for your region, well, you will be

integrating first over r. So, that means what you're doing is you're fixing the value of theta. And, for that value of theta, you ask yourself, for what range of values of r am I going to be inside my origin?
Vì vậy, khi bạn đi đến tọa độ cực, về cơ bản tất cả những gì bạn phải nhớ ở vế lấy tích phân là x trở thành r cosin theta. y trở thành r sin theta. Và, dx dy trở thành r dr d theta. Tùy thuộc vào cách cắt vùng, vâng, đầu tiên bạn sẽ lấy tích phân trên r. Vì vậy, điều đó có nghĩa là những gì bạn đang làm là bạn đang cố định giá trị của theta. Và, đối với giá trị đó của theta, bạn tự hỏi, đối với khoảng giá trị nào của r tôi sẽ ở bên trong vùng của chúng ta?

So, if my origin looks like this, then for this value of theta, r would go from zero to whatever this distance is. And of course I have to find how this distance depends on theta. And then, I will find the extreme values of theta. Now, of course, is the origin is really looking like this, then you're not going to do it in polar coordinates. But, if it's like a circle or a half circle, or things like that, then even if a problem doesn't tell you to do it in polar coordinates you might want to seriously consider it.
Vâng, nếu vùng của chúng ta như thế này, thì đối với giá trị này của theta, r sẽ đi từ không đến bất cứ khoảng cách này. Và dĩ nhiên tôi phải tìm khoảng cách này phụ thuộc như thế nào vào theta. Và sau đó, tôi sẽ tìm thấy giá trị cực trị của theta. Bây giờ, tất nhiên, nếu vùng có hình dạng như thế này, thì bạn sẽ không làm nó trong các tọa độ cực. Nhưng, nếu nó có dạng đường tròn hoặc nửa đường tròn, hoặc thứ gì đó giống như thế, thì cho dù đề bài không yêu cầu bạn làm nó thì bạn cũng cần xét nó nghiêm túc.

OK, so I'm not going to do it but problem two in the practice exam is a good example of doing something in polar coordinates. OK, so in terms of things that we do with double integrals, there's a few formulas that I'd like you to remember about applications that we've seen of double integrals. So, quantities that we can compute with double integrals include things like the area of region, its mass if it has a density, the average value of some function, for example, the average value of the x and y coordinates, which we called the center of mass or moments of inertia. So, these are just formulas to remember.
Vâng, vì vậy tôi sẽ không làm nó nhưng bài tập hai trong bài kiểm tra thử là ví dụ hay về tính tích phân trong hệ tọa độ cực. Vâng, do đó tùy thuộc vào các thứ mà chúng ta thực hiện với tích phân kép, có vài công thức mà tôi muốn bạn nhớ về các ứng dụng mà chúng ta đã thấy của tích phân kép. Vì vậy, các đại lượng mà chúng ta có thể tính với tích phân kép bao gồm các thứ như diện tích của vùng, khối lượng của nó nếu nó có mật độ, giá trị trung bình của hàm nào đó, ví dụ, giá trị trung bình của các tọa độ x và y, mà chúng ta gọi là khối tâm hoặc moment quán tính. Vì vậy, đây chính là các công thức cần nhớ.

So, for example, the area of region is the double integral of just dA, or if it helps you, one dA if you want. You are integrating the function 1. You have to remember formulas for mass, for the average value of a function is the F bar, in particular x bar y bar, which is the center of mass, and the moment of inertia. OK, so the polar moment of inertia, which is moment of inertia about the origin. OK, so that's double integral of x squared plus y squared, density dA, but also moments of inertia about the x and y axis, which are given by just taking one of these guys.
Vì vậy, ví dụ, diện tích vùng là tích phân kép của dA, hoặc nếu nó giúp bạn, một dA nếu bạn muốn. Bạn đang lấy tích phân hàm 1. Bạn phải nhớ các công thức của khối lượng, giá trị trung bình của hàm là F gạch, đặc biệt x gạch y gạch, nó là khối tâm, và moment quán tính. Vâng, do đó moment quán tính cực, đó là moment quán tính xung quanh gốc tọa độ. Vâng, đó là tích phân kép của x bình cộng y bình, mật độ dA, mà còn môment quán tính xung quanh trục x và y, nó được tìm bằng cách chọn một trong những thằng này.

Don't worry about moments of inertia about an arbitrary line. I will ask you for a moment of inertia for some weird line or something like that. OK, but these you should know. Now, what if you somehow, on the spur of the moment, you forget, what's the formula for moment of inertia? Well, I mean, I prefer if you know, but if you have a complete blank in your memory, there will still be partial credit were setting up the bounds and everything else.
Đừng lo lắng về moment quán tính xung quanh đường thẳng tùy ý. Tôi sẽ hỏi bạn moment quán tính đối với đường thẳng lạ hoặc cái gì đó tương tự vậy. Vâng, nhưng bạn nên biết những cái này. Bây giờ, giá như bạn, do bị hối thúc, bạn quên, công thức của moment quán tính là gì? Vâng, ý tôi là, tôi thích hơn nếu bạn biết, nhưng nếu bạn hoàn toàn không nhớ gì cả, vẫn có điểm từng phần cho việc tìm các cận và mọi thứ khác.

So, the general rule for the exam will be if you're stuck in a calculation or you're missing a little piece of the puzzle, try to do as much as you can. In particular, try to at least set up the bounds of the integral. There will be partial credit for that always. So, while we're at it about grand rules, how about evaluation? How about evaluating integrals? So, once you've set it up, you have to sometimes compute it.
Vì vậy, nguyên tắc chung để làm bài thi là nếu bạn bị sa lầy trong tính toán hoặc đang thiếu vài phần nhỏ của câu hỏi, cố gắng làm càng nhiều càng tốt. Đặc biệt, ít nhất là cố gắng thiết lập các cận của tích phân. Luôn luôn có điểm từng phần cho nó. Vâng, đó là các nguyên tắc chung, thế còn tính toán thì sao? Tính tích phân như thế nào? Vâng, một khi bạn đã thiết lập nó, thỉnh thoảng bạn phải tính nó.

First of all, check just in case the problem says set up but do not evaluate. Then, don't waste your time evaluating it. If a problem says to compute it, then you have to compute it. So, what kinds of integration techniques do you need to know? So, you need to know, you must know, well, how to integrate the usual functions like one over x or x to the n, or exponential, sine, cosine, things like that, OK, so the usual integrals.
Trước hết, hãy kiểm tra chỉ trong trường hợp đề bài yêu cầu thiết lập nhưng không tính toán. Thế thì, đừng lãng phí thời gian để tính toán. Nếu đề bài yêu cầu tính nó, thì bạn phải tính nó. Vâng, bạn cần biết những kĩ thuật tính tích phân nào? Vì vậy, bạn cần biết, bạn phải biết, vâng, cách lấy tích phân các hàm thông thường chẳng hạn như một trên x hoặc x mũ n, hay e mũ, sin, cos, các thứ tương tự thế, vâng, nói chung là các tích phân thông thường.

You must know what I will call easy trigonometry. OK, I don't want to give you a complete list. And the more you ask me about which ones are on the list, the more I will add to the list. But, those that you know that you should know, you should know. Those that you think you shouldn't know, you don't have to know because I will say what I will say soon. You should know also substitution, how to set U equals something, and then see, oh, this becomes u times du, and so substitution method. What do I mean by easy trigonometrics? Well, certainly you should know how to ingrate sine. You should know how to integrate cosine. You should be aware that

sine squared plus cosine squared simplifies to one.
Bạn phải biết lượng giác cơ bản. Vâng, tôi không muốn đưa ra một danh sách hoàn chỉnh. Và nếu bạn hỏi tôi vấn đề nào cần phải học, tôi càng thêm vào danh sách nhiều hơn. Nhưng, bạn nên biết những cái bạn nên biết, bạn nên biết. Những cái đó bạn nghĩ bạn không nên biết, bạn không cần biết vì tôi sẽ nói những gì tôi sẽ nói ngay. Bạn nên biết phép thế, cách thiết lập U bằng một cái gì đó, và sau đó thấy không, oh, cái này trở thành u nhân du, và vì vậy phương pháp thế. Lượng giác cơ bản nghĩa là gì? Vâng, chắc chắn bạn nên biết cách tính tích phân sin. Bạn nên biết cách lấy tích phân cô sin. Bạn nên biết rằng sin bình cộng cos bình đơn giản bằng một.

And, you should be aware of general things like that. I would like you to know, maybe, the double angles, sine 2x and cosine 2x. Know what these are, and the kinds of the easy things you can do with that, also things that involve substitution setting like U equals sine T or U equals cosine T. I mean, let me, instead, give an example of hard trig that you don't need to know, and then I will answer.
Và, bạn cần phải biết các thứ chung chung như thế. Tôi muốn bạn biết, hạ bậc nâng cung, sin 2x và cos 2x. Biết đây là gì, và những thao tác cơ bản bạn có thể làm với nó, các thứ liên quan đến sự thiết lập phép thế chẳng hạn như U bằng sin T hoặc U bằng cos T. Ý tôi là, thay vì vậy, hãy để tôi đưa ra một ví dụ về lượng giác khó mà bạn không cần biết, và sau đó tôi sẽ trả lời.

OK, so, not needed on Thursday; it doesn't mean that I don't want you to know them. I would love you to know every single integral formula. But, that shouldn't be your top priority. So, you don't need to know things like hard trigonometric ones. So, let me give you an example. OK, so if I ask you to do this one, then actually I will give you maybe, you know, I will reprint the formula from the notes or something like that. OK, so that one you don't need to know. I would love if you happen to know it, but if you need it, it will be given to you.

Vâng, vì vậy, không cần thiết vào ngày Thứ năm; không có nghĩa là tôi không muốn bạn biết chúng. Tôi rất muốn bạn biết mọi công thức tích phân hàm một biến. Tuy nhiên, đó không nên là ưu tiên hàng đầu của bạn. Vì vậy, bạn không cần phải biết những thứ như lượng giác nâng cao. Vâng, hãy để tôi cho bạn một ví dụ. Vâng, do đó, nếu tôi yêu cầu bạn làm cái này, thì tôi sẽ cho bạn, bạn biết, tôi sẽ in lại các công thức từ các note hoặc thứ gì đó tương tự thế. Vâng, vì vậy bạn không cần biết cái đó. Tôi rất vui nếu bạn tình cờ biết nó, nhưng nếu bạn cần nó, đề sẽ cho bạn.

So, these kinds of things that you cannot compute by any easy method. And, integration by parts, I believe that I successfully test-solved all the problems without doing any single integration by parts. Again, in general, it's something that I would like you to know, but it shouldn't be a top priority for this week. OK, sorry, you had a question, or? Inverse trigonometric functions: let's say the most easy ones. I would like you to know the easiest inverse trig functions, but not much. OK, OK, so be aware that these functions exist, but it's not a top priority.
Vì vậy, những thứ này bạn không thể tính bằng bất kì phương pháp dễ nào. Và, lấy tích phân từng phần, tôi tin rằng tôi đã giải thử tất cả các bài tập mà chưa thực hiện tích phân từng phần. Một lần nữa, nói chung, nó là thứ gì đó mà tôi muốn bạn biết, nhưng nó không phải là một ưu tiên hàng đầu cho tuần này. Vâng, xin lỗi, bạn có câu hỏi gì không, hay? Các hàm lượng giác ngược: giả sử rằng những cái dễ nhất. Tôi muốn bạn biết những hàm lượng giác ngược dễ nhất, nhưng không nhiều. Vâng, Vâng, vì vậy chú ý rằng các hàm này cũng có, nhưng nó không phải là ưu tiên hàng đầu.

I should say, the more I tell you I don't need you to know, the more your physics and other teachers might complain that, oh, these guys don't know how to integrate. So, try not to forget everything. But, yes? No, no, here I just mean for evaluating just a single variable integral. I will get to change variables and Jacobian soon, but I'm thinking of this as a different topic. What I mean by this one is if I'm asking you to integrate, I don't know, what's a good example?
Tôi nên nói trước là, tôi càng bỏ bớt cho các bạn bao nhiêu, môn vật lý và các giáo viên khác của bạn càng phàn nàn, oh, những thằng này không biết cách tính tính tích phân. Vâng, cố gắng đừng quên mọi thứ. Nhưng, xin mời? Không, không, ở đây tôi chỉ muốn nói để tính tích phân hàm một biến. Tôi sẽ phải đổi biến và Jacobi ngay, nhưng tôi đang nghĩ đến việc này như một chủ đề khác. Qua cái này tôi muốn nói là nếu tôi yêu cầu bạn tính tích phân, tôi không biết, ví dụ tốt là gì?

Zero to one t dt over square root of one plus t squared, then you should think of maybe substituting u equals one plus t squared, and then it becomes easier. OK, so this kind of trig, that's what I have in mind here specifically. And again, if you're stuck, in particular, if you hit this dreaded guy, and you don't actually have a formula giving you what it is, it means one of two things. One is something's wrong with your solution. The other option is something is wrong with my problem. So, either way, check quickly what you've done it if you can't find a mistake, then just move ahead to the next problem.
Không đến một t dt trên căn bậc hai của một cộng với t bình, thì bạn nên nghĩ đến phép thế u bằng một cộng t bình, và thế thì nó trở nên dễ dàng hơn. Vâng, vì vậy, loại lượng giác này, đó là những gì tôi có trong tâm trí ở đây một cách cụ thể. Và một lần nữa, nếu bạn sa lầy, đặc biệt, nếu bạn gặp những thằng đáng sợ này, và bạn không được cho công thức nào, có thể có hai khả năng. Một là cách giải của bạn không ổn. Hai là có thể đề sai. Vì vậy, một trong hai cách, hãy kiểm tra một cách nhanh chóng những gì bạn đã thực hiện nó nếu bạn không tìm thấy lỗi, thế thì chỉ cần chuyển sang bài tiếp theo.

Which one, this one? Yeah, I mean if you can do it, if you know how to do it, which everything is fair: I mean, generally speaking, give enough of it so that you found the solution by yourself, not like, you know, it didn't somehow come to you by magic. But, yeah, if you know how to integrate this without doing the substitution, that's absolutely fine by me. Just show enough work. The general rule is show enough work that we see that you knew what you are doing.
Cái nào, cái này? Vâng, ý tôi là nếu bạn có thể làm nó, nếu bạn biết cách làm nó, mọi thứ đúng: Ý tôi là, nói chung, để cho đầy đủ để bạn tự tìm lời giải, không giống, bạn biết, nó đã không cách nào đến với bạn bằng phép thuật. Nhưng, vâng, nếu bạn biết cách tính tích phân cái này mà không dùng phép thế, đối với tôi điều đó tuyệt đối tốt. Chỉ cần thể hiện đầy đủ các bước. Nguyên tắc chung là chỉ ra đầy đủ các bước để chứng tỏ rằng bạn biết cách làm nó.

OK, now another thing we've seen with double integrals is how to do more

complicated changes of variables. So, when you want to replace x and y by some variables, u and v, given by some formulas in terms of x and y. So, you need to remember basically how to do them. So, you need to remember that the method consists of three steps. So, one is you have to find the Jacobian. And, you can choose to do either this Jacobian or the inverse one depending on what's easiest given what you're given. You don't have to worry about solving for things the other way around. Just compute one of these Jacobians.
Vâng, bây giờ một điều chúng ta đã thấy với các tích phân kép là tính các tích phân phức tạp bằng cách đổi biến. Vì vậy, khi bạn muốn thay x và y bằng một số biến nào đó, u và v, được cho bởi một số công thức theo x và y. Vì vậy, về cơ bản bạn cần phải nhớ cách làm chúng. Vì vậy, bạn cần phải nhớ rằng phương pháp này bao gồm ba bước. Vâng, một là bạn phải tìm Jacobi. Và, bạn có thể chọn làm hoặc Jacobi này hoặc cái ngược lại để làm sao cho việc tính toán đơn giản nhất. Bạn không phải lo lắng về việc giải mọi thứ theo cách khác. Chỉ cần tính một trong những Jacobi này.

And then, the rule is that du dv is absolute value of the Jacobian dx dy. So, that takes care of dx dy, how to convert that into du dv. The second thing to know is that, well, you need to of course substitute any x and y's in the integrand to convert them to u's and v's so that you have a valid integrand involving only u and v. And then, the last part is setting up the bounds. And you see that, probably you seen on P-sets and an example we did in the lecture that this can be complicated. But now, in real life, you do this actually to simplify the integrals. So, probably the one that will be there on Thursday, if there's a problem about that on Thursday, it will be a situation where the bounds that you get after changing variables are reasonably easy. OK, I'm not saying that it will be completely obvious necessarily, but it will be a fairly easy situation. So, the general method is you look at your region, R, and it might have various sides.

Và sau đó, nguyên tắc là du dv là giá trị tuyệt đối của Jacobi dx dy. Vì vậy, hãy quan tâm đến dx dy, cách chuyển nó thành du dv. Điều thứ hai là, vâng, tất nhiên bạn cần phải thay thế bất kỳ x và y trong biểu thức lấy tích phân để chuyển chúng thành các u và các v để cho bạn có tích phân hợp lệ chỉ liên quan đến u và v. Và sau đó, phần cuối cùng là thiết lập các cận. Và bạn thấy rằng, có thể bạn đã thấy trên xấp bài tập P và một ví dụ mà chúng ta đã làm trong bài giảng điều này có thể phức tạp. Nhưng hiện tại, trong thực tế, bạn làm điều này để đơn giản hóa các tích phân. Vì vậy, sẽ có bài dạng này vào thứ năm, nếu có bài dạng này vào thứ năm, nó chỉ là các bài ở đó các cận mà bạn nhận được sau khi đổi biến là dễ dàng. Vâng, tôi không nói rằng nó hoàn toàn cần thiết, nhưng nó sẽ là trường hợp khá dễ. Vì vậy, phương pháp chung là bạn xét vùng của bạn, R, và nó có thể có hai cạnh khác nhau.

Well, on each side you ask yourself, what do I know about x and y, and how to convert that in terms of u and v? And maybe you'll find that the equation might be just u equals zero for example, or u equals v, or something like that. And then, it's up to you to decide what you want to do. But, maybe the easiest usually is to draw a new picture in terms of u and v coordinates of what your region will look like in the new coordinates. It might be that it will actually much easier. It should be easier looking than what you started with.
Vâng, trên mỗi cạnh bạn tự hỏi, tôi biết gì về x và y, và làm thế nào để chuyển cái đó theo u và v? Và có lẽ bạn sẽ thấy rằng phương trình có thể chỉ là u bằng không chẳng hạn, hoặc u bằng v, hay cái gì tương tự thế. Và sau đó, nó đưa bạn đến quyết định bạn muốn làm gì. Tuy nhiên, có thể dễ nhất thường là vẽ một hình mới theo các tọa độ u và v của vùng của bạn trong như thế nào trong các tọa độ mới. Có thể là nó sẽ thực sự dễ hơn nhiều. Nó sẽ dễ hơn cái ban đầu.

OK, so that's the general idea. There is one change of variable problem on each of the two practice exams to give you a feeling for what's realistic. The problem that's on practice exam 3B actually is on the hard side of things because the question is kind of hidden in a way. So, if you look at problem six, you might find that it's not telling you very clearly what you have to do. That's because it was meant to be the hardest problem on that test.
Vâng, vì vậy đó là ý tưởng chung. Có một bài toán đổi biến ở mỗi hai bài thi thử để cho bạn cảm giác thực tế. Bài tập trên bài thi thử 3B thực sự ở phía khó của các thứ bởi vì câu hỏi phần nào bị ẩn theo một cách. Vì vậy, nếu bạn xét bài tập sáu, bạn có thể thấy rằng nó không cho bạn biết rõ ràng những gì bạn phải làm. Đó là bởi vì nó được nói là bài khó nhất trong bài kiểm tra đó.

But, once you've reduced it to an actual change of variables problem, I expect you to be able to know how to do it. And, on practice exam 3A, there's also, I think it's problem five on the other practice exam. And, that one is actually pretty standard and straightforward. OK, time to move on, sorry. So, we've also seen about line integrals. OK, so line integrals, so the main thing to know about them, so the line integral for work, which is line integral of F.dr, so let's say that your vector field has components, M and N. So, the line integral for work becomes in coordinates integral of Mdx plus Ndy while we've also seen line integral for flux.
Tuy nhiên, một khi bạn đã đưa nó về một bài toán đổi biến thực sự, tôi hi vọng bạn biết cách làm nó. Và, trong bài thi thử 3A, cũng có, tôi nghĩ nó là bài tập năm ở bài kiểm tra thực hành còn lại. Và, cái đó thực sự tiêu chuẩn và trực tiếp. Vâng, đã đến lúc chuyển chủ đề, xin lỗi. Vì vậy, chúng ta cũng đã thấy các tích phân đường. Vâng, do đó tích phân đường, do đó điều chủ yếu để biết về chúng, vâng tích phân đường của công, đó là tích phân đường của F.dr, vì vậy giả sử rằng trường vector của bạn có các thành phần, M và N. Vâng, tích phân đường cho công trở thành tích phân tọa độ M dx cộng N dy trong khi chúng ta cũng đã thấy tích phân đường cho thông lượng.

So, line integral of F.n ds becomes the integral along C just to make sure that I give it to you correctly. So, remember that just, I don't want to make the mistake in front of you. So, T ds is dx, dy. And, the normal vector, so, T ds goes along the curve. Nds goes clockwise perpendicular to the curve. So, it's going to be, well, it's going to be dy and negative dx. So, you will be integrating negative Ndx plus Mdy.
Vì vậy, tích phân đường F.n ds trở thành tích phân dọc theo C chỉ để đảm bảo rằng tôi đưa nó cho bạn chính xác. Vì vậy, hãy nhớ rằng chỉ cần, tôi không muốn phạm sai lầm trước mặt bạn. Vì vậy, T ds bằng dx, dy. Và, vector pháp tuyến, vì vậy, T ds đi dọc theo đường cong. Nds đi cùng chiều kim đồng hồ vuông góc với đường cong. Vì vậy, nó sẽ là, vâng, nó sẽ là dy và trừ dx. Vì vậy, bạn sẽ lấy tích phân trừ Ndx cộng Mdy.

OK, see, if you are blanking and don't remember the signs, then you can just draw this picture and make sure that you get it right. So, you should know a little bit about geometric interpretation and how to see easily that it's going to be zero in some cases. But, mostly you should know how to compute, set up and compute

these things. So, what do we do when we are here? Well, it's year, we have both x and y together, but we want to, because it's the line integral, there should be only one variable. So, the important thing to know is we want to reduce everything to a single parameter.
Vâng, xem nào, nếu bạn trống rỗng và không nhớ dấu, thì bạn chỉ cần vẽ hình này và đảm bảo rằng bạn nhận được nó ngay. Vì vậy, bạn nên biết một chút về hình học giải tích và cách thấy dễ dàng nó sẽ bằng không trong một số trường hợp. Tuy nhiên, chủ yếu bạn nên biết cách tính, thiết lập và tính những thứ này. Vì vậy, chúng ta làm gì khi chúng ta ở đây? Vâng, đó là năm, chúng ta có cả x và y với nhau, nhưng chúng ta muốn, bởi vì nó là tích phân đường, đó sẽ chỉ là một biến. Vì vậy, điều quan trọng cần biết là chúng ta muốn rút mọi thứ về một tham số duy nhất.

OK, so the evaluation method is always by reducing to a single parameter. So, for example, maybe x and y are both functions of some variable, t, and then express everything in terms of some integral of, some quantity involving t dt. It could be that you will just express everything in terms of x or in terms of y, or in terms of some angle or something. It's up to you to choose how to parameterize things. And then, when you're there, it's a usual one variable integral with a single variable in there.
Vâng, vì vậy phương pháp tính toán luôn luôn là giảm đến một tham số duy nhất. Vì vậy, ví dụ, có thể cả x và y đều là hàm của biến t nào đó, và sau đó biểu diễn mọi thứ theo tích phân nào đó của, một đại lượng liên quan đến t dt. Bạn còn có thể biểu diễn mọi thứ theo x hoặc theo y, hoặc theo góc hay thứ gì đó. Nó đưa bạn đến việc chọn lựa cách tham số hóa các thứ. Và sau đó, khi bạn đến đó, nó là tích phân hàm một biến thông thường.

OK, so that's the general method of calculation, but we've seen a shortcut for work when we can show that the field is the gradient of potential. So, one thing to know is if the curl of F, which is an x minus My happens to be zero, well, and now I can say, and the domain is simply connected, or if the field is defined everywhere, then F is actually a gradient field. So, that means, just to make it more concrete, that means we can find a function little f called the potential such that its derivative respect to x is M, and its derivative with respect to Y is N.

Vâng, do đó, đó là phương pháp tính toán chung, nhưng chúng ta đã thấy một thủ thuật tính công trong trường hợp chúng ta có thể chứng tỏ rằng trường là gradient của thế. Vâng, một điều cần biết là nếu curl của F, nó bằng Nx trừ My ngẫu nhiên bằng không, vâng, và bây giờ tôi có thể nói, và miền là đơn liên, hoặc nếu trường được xác định ở mọi nơi, thì F thực sự là trường gradient. Vì vậy, có nghĩa là, chỉ cần làm cho nó cụ thể hơn, điều đó có nghĩa là chúng ta có thể tìm hàm f nhỏ được gọi là thế để cho đạo hàm của nó theo x bằng M, và đạo hàm của nó đối với y là N.

We can solve these two conditions for the same function, f, simultaneously. And, how do we find this function, little f? OK, so that's the same as saying that the field, big F, is the gradient of little f. And, how do we find this function, little f? Well, we've seen two methods. One of them involves computing a line integral from the origin to a point in the plane by going first along the x axis, then vertically.
Chúng ta có thể giải hai điều kiện này cho cùng một hàm, f, đồng thời. Và, chúng ta tìm hàm này như thế nào, f nhỏ? Vâng, do đó, nó tương tự như nói rằng trường, F lớn, là gradient của f nhỏ. Và, chúng ta tìm hàm này như thế nào, f nhỏ? Vâng, chúng ta đã thấy hai phương pháp. Một trong số chúng liên quan đến tích phân đường từ gốc tọa độ đến một điểm trong mặt phẳng bằng cách đầu tiên đi dọc theo trục x, sau đó theo chiều dọc.

The other method was to first figure out what this one tells us by integrating it with respect to x. And then, we differentiate our answer with respect to y, and we compare with that to get the complete answer. OK, so I is that relevant? Well, first of all it's relevant in physics, but it's also relevant just to calculation of line integrals because we see the fundamental theorem of calculus for line integrals which says if we are integrating a gradient field and we know what the potential is.
Phương pháp khác là đầu tiên chỉ ra cái này cho chúng ta biết gì qua việc lấy tích phân nó theo x. Và sau đó, chúng ta lấy vi phân câu trả lời theo y, và chúng ta so sánh với cái đó để nhận được câu trả lời hoàn chỉnh. Vâng, vì vậy điều đó có thích đáng không? Vâng, trước hết nó thích đáng trong vật lí, nhưng nó cũng thích đáng để tính tích phân đường bởi vì chúng ta đã thấy định lí cơ bản của giải tích cho các tích phân đường nội dung là nếu chúng ta lấy tích phân một trường gradient và chúng ta biết thế là gì.

Then, we just have to, well, the line integral is just the change in value of a potential. OK, so we take the value of a potential at the starting point, sorry, we take value potential at the endpoint minus the value at the starting point. And, that will give us the line integral, OK? So, important: this is only for work. There's no statement like that for flux, OK, so don't tried to fly this in a problem about flux. I mean, usually, if you look at the practice exams, you will see it's pretty clear that there's one problem in which you are supposed to do things this way. It's kind of a dead giveaway, but it's probably not too bad.
Thế thì, chúng ta chỉ cần, vâng, tích phân đường bằng sự thay đổi giá trị của thế. Vâng, vì vậy chúng ta lấy giá trị của thế tại điểm bắt đầu , xin lỗi, chúng ta lấy giá trị thế tại điểm cuối trừ giá trị thế tại điểm đầu. Và, điều đó sẽ cho chúng ta tích phân đường, đúng không? Vì vậy, quan trọng: điều này chỉ áp dụng cho công. Không có phát biểu tương tự thế cho thông lượng, Vâng, vì vậy đừng thử áp dụng cái này vào các bài toán thông lượng. Ý tôi là, thông thường, nếu bạn nhìn vào các bài kiểm tra thử, bạn sẽ thấy nó khá rõ rằng có một bài tập trong đó bạn được đề nghị làm các thứ theo cách này. Thật là khó khăn, nhưng không đến nỗi tệ.

OK, and the other thing we've seen, so I mentioned it at the beginning but let me mention it again. To compute things, Green's theorem, let's just compute, well, let us forget, sorry, find the value of a line integral along the closed curve by reducing it to double integral. So, the one for work says -- -- this, and you should remember that in there, so C is a closed curve that goes counterclockwise, and R is the region inside. So, the way you would, if you had to compute both sides separately, you would do them in extremely different ways, right? This one is a line integral. So, you use the method to explain here, namely, you express x and y in terms of a single variable. See that you're doing a circle. I want to see a theta. I don't want to see an R. R is not a variable. You are on the circle. This one is a double integral. So, if you are doing it, say, on a disk, you would have both R and theta if you're using polar coordinates. You would have both x and y.
Vâng, và điều khác mà chúng ta đã thấy, vâng tôi đã đề cập nó ngay từ đầu nhưng hãy để tôi nhắc lại một lần nữa. Để tính toán các thứ, định lý Green, chúng ta hãy tính, vâng, chúng ta hãy quên, xin lỗi, tìm giá trị của tích phân đường dọc theo đường cong kín bằng cách đưa nó về tích phân kép. Vì vậy,cái đối với công nói - - đây, và bạn nên

nhớ cái đó ở đó, vâng C là một đường cong khép kín đi ngược chiều kim đồng hồ, và R là một vùng bên trong. Vì vậy, cách bạn sẽ, nếu bạn phải tính cả hai vế riêng biệt, bạn sẽ làm chúng theo những cách rất khác nhau, phải không? Cái này là tích phân đường. Vì vậy, bạn sử dụng phương pháp giải thích ở đây, cụ thể là, bạn biểu diễn x và y theo một biến duy nhất. Thấy rằng bạn đang làm trên đường tròn. Tôi muốn thấy một theta. Tôi không muốn thấy một R. R không phải là một biến. Bạn ở trên đường tròn. Cái này là tích phân kép. Vì vậy, nếu bạn đang tính nó, giả sử, trên một đĩa, bạn sẽ có cả R và theta nếu bạn sử dụng hệ tọa độ cực. Bạn sẽ có cả x và y.

Here, you have two variables of integration. Here, you should have only one after you parameterize the curve. And, the fact that it stays curl F, I mean, curl F is just Nx-My is just like any function of x and y. OK, the fact that we called it curl F doesn't change how you compute it. You have first to compute the curl of F. Say you find, I don't know, xy minus x squared, well, it becomes just the usual double integral of the usual function xy minus x squared.
Ở đây, bạn có hai biến tích phân. Tại đây, bạn chỉ có một sau khi tham số hóa đường cong. Và, việc curl F, ý tôi là, curl F chính là Nx-My giống như bất kỳ hàm nào của x và y. Vâng, việc chúng ta gọi nó là curl F không thay đổi cách tính nó. Đầu tiên bạn phải tính curl F. Giả sử bạn tìm được, tôi không biết, xy trừ x bình phương, vâng, nó sẽ trở thành tích phân kép bình thường của hàm bình thường xy trừ x bình.

There's nothing special to it because it's a curl. And, the other one is the counterpart for flux. So, it says this, and remember this is mx plus ny. I mean, what's important about these statements is not only remembering, you know, if you just know this formula by heart, you are still in trouble because you need to know what actually the symbols in here mean. So, you should remember, what is this line integral, and what's the divergence of a field? So, just something to remember. And, so I guess I'll let you figure out practice problems because it's time, but I think that's basically the list of all we've seen. And, well, that should be it.

Không có gì đặc biệt đối với nó bởi vì nó là một curl. Và, cái kia là đối tác cho thông lượng. Vâng, nó nói đây, và hãy nhớ đây là mx cộng ny. Ý tôi là, đối với những phát biểu này không chỉ cần nhớ, bạn biết, nếu bạn chỉ thuộc lòng công thức này, bạn vẫn còn gặp rắc rối bởi vì bạn cần phải biết những kí hiệu ở đây có nghĩa là gì. Vì vậy, bạn nên nhớ, tích phân đường là gì, và divergence là gì? Vì vậy, chỉ cần một cái gì đó để nhớ. Và, vì vậy tôi nghĩ tôi sẽ để cho bạn tự làm các bài tập thực hành bởi vì đó là lúc, nhưng tôi nghĩ về cơ bản đó là danh sách tất cả những gì chúng ta đã thấy. Và, vâng, như vậy thôi.

So, again, I will have office hours now, tomorrow, and otherwise, good luck on the test.

Vì vậy, một lần nữa, hiện tại tôi sẽ có mặt trong giờ làm việc, ngày mai, và nếu không, chúc may mắn trong khi thi.