MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 32

Định lí Stokes (tiếp); ôn tập

Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

Thank you. So, yesterday we saw stuff about Stokes theorem. And, I have a few more things to tell you about it, and some applications, and how it connects to various other things. And then, we'll review for the exam because I hate to remind you, but on Tuesday, that's the last test in this class, and so it's at 1 pm usual time in the usual place, namely in Walker for most of you and in here for some of you.
Cảm ơn. Vâng, hôm qua chúng ta đã học định lí Stokes. Và, tôi sẽ nói thêm vài điều về nó, và một số ứng dụng, và nó liên quan với những thứ khác như thế nào. Và sau đó, chúng ta sẽ ôn tập chuẩn bị kiểm tra bởi vì tôi phải nhắc bạn là, vào ngày thứ ba, đó là bài kiểm tra cuối cùng của môn này, và vâng lúc 1 giờ chiều như mọi khi ở địa điểm như cũ, cụ thể là ở Walker đối với hầu hết các bạn và tại đây cho một số bạn.

So: same place as last time and the time before. OK, so remember, we've seen Stokes theorem, which says if I have a closed curve bounding some surface, S, and I orient the curve and the surface compatible with each other, then I can compute the line integral along C along my curve in terms of, instead, surface integral for flux of a different vector field, namely, curl f dot n dS. OK, so that's the statement. And, just to clarify a little bit, so, again, we've seen various kinds of integrals. So, line integrals we know how to evaluate. They take place in a curve. You express everything in terms of one variable, and after substituting, you end up with a usual one variable integral that you know how to evaluate.
Vì vậy: cùng một địa điểm và thời gian như trước đây. OK, nhớ rằng, chúng ta đã học định lí Stokes, nội dung là nếu tôi có một đường cong khép kín bao quanh mặt S nào đó, và tôi định hướng đường cong và bề mặt tương thích với nhau, sau đó tôi có thể tính tích phân đường dọc theo đường cong C của tôi theo, tích phân mặt cho thông lượng của một trường vector khác, cụ thể là, curl f dot n dS. OK, vì vậy đó nội dung định lí. Và, chỉ để làm rõ thêm một chút, vì vậy, một lần nữa, chúng ta đã thấy các loại tích phân khác nhau. Vâng, tích phân đường chúng ta đã biết cách tính. Chúng được tính trên một đường cong. Bạn biểu diễn mọi thứ theo một biến, và sau khi thế, bạn được tích phân hàm một biến bình thường.

And, surface integrals, we know also how to evaluate. Namely, we've seen various formulas for ndS. Once you have such a formula, due to the dot product with this vector field, which is not the same as that one. But it's a new vector field that you can build out of f. You do the dot product. You express everything in terms of your two integration variables, and then you evaluate. So, now, what does this have to do with various other things?
Và, các tích phân mặt, chúng ta cũng biết cách tính. Cụ thể, chúng ta đã thấy các công thức khác nhau của ndS. Một khi bạn đã có một công thức như thế, vì tích vô hướng với trường vector này, nó không giống như cái đó. Nhưng nó là một trường vector mới mà bạn có thể xây dựng từ f. Bạn thực hiện tích vô hướng. Bạn biểu diễn mọi thứ theo hai biến tích phân của bạn, và sau đó bạn tính. Vì vậy, bây giờ, cái này được ứng dụng để làm gì?

So, one thing I want to say has to do with how Stokes helps us understand path independence, so, how it actually motivates our criterion for gradient fields, independence. OK, so, we've seen that if we have a vector field defined in a simply connected region, and its curl is zero, then it's a gradient field, and the line integral is path independent. So, let me first define for you when a simply connected region is. So, we say that a region in space is simply connected –
Vâng, một ứng dụng là định lí Stokes giúp chúng ta hiểu sự không phụ thuộc đường đi, vì

vậy, thực sự nó là nguyên nhân gián tiếp làm nảy sinh điều kiện để một trường là trường gradient, không phụ thuộc. OK, vì vậy, chúng ta đã nhìn thấy rằng nếu chúng ta có một trường vectơ được xác định trong một vùng đơn liên, và curl của nó bằng không, thì nó là một trường gradient, và tích phân đường không phụ thuộc đường đi. Vì vậy, trước hết tôi định nghĩa cho bạn khi nào một vùng là đơn liên. Vì vậy, chúng ta nói rằng một vùng trong không gian là đơn liên -

-- if every closed loop inside this region bounds some surface again inside this region. OK, so let me just give you some examples just to clarify. So, for example, let's say that I have a region that's the entire space with the origin removed. OK, so space with the origin removed, OK, you think it's simply connected? Who thinks it's simply connected? Who thinks it's not simply connected? Let's think a little bit harder. Let's say that I take a loop like this one, OK, it doesn't go through the origin. Can I find a surface that's bounded by this loop and that does not pass through the origin? Yeah, I can take the sphere, you know, for example, or anything that's just not quite the disk? So, and similarly, if I take any other loop that avoids the origin, I can find, actually, a surface bounded by it that does not pass through the origin.
- Nếu mỗi vòng khép kín bên trong vùng này lại bao quanh một bề mặt nào đó bên trong vùng. OK, vì vậy hãy để tôi làm rõ vấn đề này qua một số ví dụ. Vì vậy, ví dụ, giả sử rằng tôi có một vùng chiếm toàn bộ không gian trừ gốc tọa độ. OK, vì vậy, toàn bộ không gian với gốc tọa độ bị bỏ đi, OK, bạn nghĩ rằng nó có đơn liên không? Ai nghĩ rằng nó đơn liên? Ai nghĩ rằng nó không đơn liên? Hãy suy nghĩ kĩ càng hơn một chút. Giả sử tôi lấy một vòng như thế này, OK, nó không đi qua gốc tọa độ. Tôi có thể tìm một bề mặt được bao quanh bởi vòng này và không chứa gốc tọa độ không? Yeah, tôi có thể chọn một hình cầu, bạn đã biết, ví dụ, hoặc bất cứ cái gì không chỉ là hình tròn? Vì vậy, và tương tự, nếu tôi chọn bất kỳ vòng nào khác không chứa gốc tọa độ, tôi có thể tìm được, thực sự, một bề mặt được bao quanh bởi nó không chứa gốc tọa độ.

So, actually, that's kind of a not so obvious theorem to prove, but maybe intuitively, start by finding any surface. Well, if that surface passes through the origin, just wiggle it a little bit, you can make sure it doesn't pass through the origin anymore. Just push it a little bit. So, in fact, this is simply connected. That was a trick question. OK, now on the other hand, a good example of something that is not simply connected is if I take space, and I remove the z axis –

Vì vậy, thực sự, đó không phải là định lí khá rõ ràng để chứng minh, nhưng có lẽ trực quan, bắt đầu bằng cách tìm bất kỳ bề mặt nào. Vâng, nếu bề mặt chứa gốc tọa độ, chỉ cần lắc nó một chút, bạn có thể chắc chắn rằng nó không đi qua gốc tọa độ nữa. Chỉ cần đẩy nó một chút. Vì vậy, trên thực tế, cái này là đơn liên. Đó là một câu hỏi khó. OK, bây giờ trái lại, một ví dụ hay về vùng không đơn liên là nếu tôi chọn không gian, và tôi bỏ trục z -

-- that is not simply connected. And, see, the reason is, if I look again, say, at the unit circle in the x axis, sorry, unit circle in the xy plane, I mean, in the xy plane, so, if I try to find a surface whose boundary is this disk, well, it has to actually cross the z axis somewhere. There's no way that I can find a surface whose only boundary is this curve, which doesn't hit the z axis anywhere.
- nó không đơn liên. Và, thấy không, lý do là, nếu tôi lại xét, giả sử, đường tròn đơn vị trong trục x, xin lỗi, đường tròn đơn vị trong mặt phẳng xy, ý tôi là, trong mặt phẳng xy, do đó, nếu tôi thử tìm bề mặt mà biên của nó là đường tròn này, vâng, nó phải đi qua trục z ở đâu đó. Không thể nào có một bề mặt mà biên của nó là đường cong này, không chạm trục z ở bất cứ đâu.

Of course, you could try to use the same trick as there, say, maybe we want to go up, up, up. You know, let's start with a cylinder. Well, the problem is you have to go infinitely far because the z axis goes infinitely far. And, you'll never be able to actually close your surface. So, the matter what kind of trick you might want to use, it's actually a theorem in topology that you cannot find a surface bounded by this disk without intersecting the z axis.
Tất nhiên, bạn có thể thử sử dụng thủ thuật tương tự như ở đó, giả sử, có lẽ chúng ta muốn đi lên, lên, lên. Bạn biết, chúng ta hãy bắt đầu với một hình trụ. Vâng, vấn đề là bạn phải đi xa vô cùng vì trục z đi ra xa vô cùng. Và, bạn sẽ không bao giờ đóng được bề mặt của bạn. Vì vậy, vấn đề là loại thủ thuật nào bạn muốn sử dụng, nó thực sự là một định lý trong topo, đó là bạn không thể tìm một bề mặt được bao bởi đường tròn này mà không giao với trục z.

Yes? Well, a doughnut shape certainly would stay away from the z axis, but it wouldn't be a surface with boundary just this guy. Right, it would have to have either some other boundary. So, maybe what you have in mind is some sort of doughnut shape like this that curves on itself, and maybe comes back. Well, if you don't quite close it all the way around, so I can try to, indeed, draw some sort of doughnut here.
Xin mời? Vâng, một hình dạng như bánh rán chắc chắn sẽ nằm xa trục z, nhưng nó sẽ không là một bề mặt với biên là thằng này. Đúng, nó phải có biên khác. Vâng, có lẽ bạn đang nghĩ đến một số loại bánh rán có hình dạng như thế này bẻ cong chính nó, và có thể trở lại. Vâng, nếu bạn không hoàn toàn đóng nó ở mọi nơi xung quanh, vì vậy tôi có thể thử vẽ một số loại bánh rán ở đây.

Well, if I don't quite close it, that it will have another edge at the other end wherever I started. If I close it completely, then this curve is no longer its boundary because my surface lives on both sides of this curve. See, I want a surface that stops on this curve, and doesn't go beyond it. And, nowhere else does it have that kind of behavior. Everywhere else, it keeps going on. So, actually, I mean, maybe actually another way to convince yourself is to find a counter example to the statement I'm going to make about vector fields with curl zero and simply connected regions always being conservative.
Vâng, nếu tôi không đóng nó hoàn toàn, nó có một biên khác ở đầu kia bất cứ nơi nào khác tôi bắt đầu. Nếu tôi đóng nó hoàn toàn, thì đường cong này không còn là biên của nó vì bề mặt của tôi nằm trên cả hai phía của đường cong này. Thấy không, tôi muốn một bề mặt dừng trên đường cong này, và không vượt qua nó. Và, nó chỉ có tính chất này ở đây. Ở khắp mọi nơi khác, nó như bình thường. Vì vậy, trên thực tế, ý tôi là, có thể một cách khác để thuyết phục chính bạn là tìm một phản ví dụ của định lí mà tôi sẽ tạo ra về trường vector

với curl bằng không và các vùng đơn liên luôn luôn bảo toàn.

So, what you can do is you can take the example that we had in one of our older problem sets. That was a vector field in the plane. But, you can also use it to define a vector field in space just with no z component. That vector field is actually defined everywhere except on the z axis, and it violates the usual theorem that we would expect. So, that's one way to check just for sure that this thing is not simply connected.
Vì vậy, những gì bạn có thể làm là bạn có thể lấy ví dụ mà chúng ta đã có trong một trong những xấp bài tập cũ hơn. Đó cũng là một trường vectơ trong mặt phẳng. Tuy nhiên, bạn cũng có thể sử dụng nó để xác định một trường vectơ trong không gian chỉ cần bỏ đi thành phần z. Trường vector đó thực sự được xác định ở mọi nơi trừ trên trục z, và nó vi phạm định lý thông thường mà chúng ta mong chờ. Vì vậy, đó là một cách để kiểm tra nhằm khẳng định chắc chắn rằng cái này không đơn liên.

So, what's the statement I want to make? So, recall we've seen if F is a gradient field -- -- then its curl is zero. That's just the fact that the mixed second partial derivatives are equal. So, now, the converse is the following theorem. It says if the curl of F equals zero in, sorry, and F is defined -- No, is not the logical in which to say it. So, if F is defined in a simply connected region, and curl F is zero –
Vì vậy, phát biểu tôi muốn tạo ra là gì? Vâng, nhớ lại rằng chúng ta đã học nếu F là một trường gradient - - thì curl của nó bằng không. Đó chỉ là do các đạo hàm cấp hai hỗn hợp bằng nhau. Vì vậy, bây giờ, chung quy là định lý sau đây. Nó nói nếu curl F bằng không trong, xin lỗi, và F được xác định - Không, nói như vậy không hợp lí. Vâng, nếu F được xác định trong vùng đơn liên, và curl F bằng không -

-- then F is a gradient field, and the line integral for F is path independent -- -- F is conservative, and so on, all the usual consequences. Remember, these are all equivalent to each other, for example, because you can use path independence to define the potential by doing the line integral of F. OK, so where do we use the assumption of being defined in a simply connected region? Well, the way which we will prove this is to use Stokes theorem. OK, so the proof, so just going to prove that the line integral is path independent; the others work the same way. OK, so let's assume that we have a vector field whose curl is zero.
- thì F là trường gradient, và tích phân đường của F không phụ thuộc đường đi - - F bảo toàn, và v.v…., tất cả các hệ quả thông thường. Hãy nhớ rằng, tất cả những cái này tương đương nhau, ví dụ, bởi vì bạn có thể sử dụng tính chất không phụ thuộc đường đi để xác định thế bằng cách tính tích phân đường của F. OK, vậy chúng ta dùng giả thuyết xác định trong vùng đơn liên ở đâu? Vâng, cách mà chúng ta sẽ chứng minh điều này là sử dụng định lý Stokes. OK, vì vậy chứng minh, chỉ cần chứng minh rằng tích phân đường không phụ thuộc đường đi; những cái khác làm việc tương tự. OK, vì vậy giả sử rằng chúng ta có một trường vector mà curl của nó bằng không.

And, let's say that we have two curves, C1 and C2, that go from some point P0 to some point P1, the same point to the same point. Well, we'd like to understand the line integral along C1, say, minus the line integral along C2 to show that this is zero. That's what we are trying to prove. So, how will we compute that? Well, the line integral along C1 minus C2, well, let's just form a closed curve that is C1 minus C2. OK, so let's call C, woops –
Và, giả sử rằng chúng ta có hai đường cong, C1 và C2, đi từ điểm P0 nào đó đến điểm P1 nào đó, cùng một điểm đến cùng một điểm. Vâng, chúng ta cần biết tích phân đường dọc theo C1, giả sử, trừ tích phân đường dọc theo C2 để chứng tỏ rằng cái này bằng không. Đó là những gì chúng ta đang cố gắng chứng minh. Vì vậy, chúng ta sẽ tính nó như thế nào? Vâng, tích phân đường dọc theo C1 trừ C2, vâng, chúng ta hãy tạo ra đường cong kín là C1 trừ C2. OK, vì vậy chúng ta hãy gọi C, ủa -

So that's equal to the integral along C of f dot dr where C is C1 followed by C2 backwards. Now, C is a closed curve. So, I can use Stokes theorem. Well, to be able to use Stokes theorem, I need, actually, to find a surface to apply it to. And, that's where the assumption of simply connected is useful. I know in advance that any closed curve, so, C in particular, has to bound some surface. OK, so we can find S, a surface, S, that bounds C because the region is simply connected. So, now that tells us we can actually apply Stokes theorem, except it won't fit here. So, instead, I will do that on the next line.
Vâng nó bằng tích phân dọc theo C của f dot dr ở đây C là C1 tiếp theo là C2 đảo ngược. Bây giờ, C là một đường cong kín. Vì vậy, tôi có thể sử dụng định lý Stokes. Vâng, để có thể sử dụng định lý Stokes, tôi cần, thực sự, tìm một bề mặt để áp dụng nó. Và, đó là nơi giả thuyết đơn liên có ích. Tôi biết trước rằng bất kỳ đường cong kín nào, vâng, đặc biệt là C, phải bao quanh bề mặt nào đó. OK, vì vậy chúng ta có thể tìm S, một mặt, S, bao quanh C bởi vì vùng đơn liên. Vì vậy, bây giờ điều đó cho chúng ta biết thực sự chúng ta có thể áp dụng định lí Stokes, ngoại trừ nó sẽ không phù hợp ở đây. Vì vậy, thay vào đó, tôi sẽ làm điều đó trên đường tiếp theo.

That's equal by Stokes to the double integral over S of curl F dot vector dS, or ndS. But now, the curl is zero. So, if I integrate zero, I will get zero. OK, so I proved that my two line integrals along C1 and C2 are equal. But for that, I needed to be able to find a surface which to apply Stokes theorem. And that required my region to be simply connected. If I had a vector field that was defined only outside of the z axis and I took two paths that went on one side and the other side of the z axis, I might have obtained, actually, different values of the line integral. OK, so anyway, that's the customary warning about simply connected things.
Theo định lí Stokes, nó bằng tích phân kép của curl F dot vector dS trên S, hoặc ndS. Nhưng hiện tại, curl bằng không. Vì vậy, nếu tôi lấy tích phân không, kết quả sẽ bằng không. OK, vì vậy tôi đã chứng minh rằng hai tích phân đường dọc theo C1 và C2 bằng nhau. Nhưng để làm điều đó, tôi cần tìm một bề mặt để áp dụng định lí Stokes. Và điều đó đòi hỏi vùng của tôi đơn liên. Nếu tôi có một trường vectơ được xác định chỉ ở bên ngoài trục z và tôi chọn hai đường đi ở một phía và phía kia là trục z, tôi có thể có được, thực sự, những giá trị khác nhau của tích phân đường. OK, do đó dù sao đi nữa, đó là cảnh báo theo thông lệ về khái niệm đơn liên.

OK, let me just mention very quickly that there's a lot of interesting topology you can do, actually in space. So, for example, this concept of being simply connected or not, and studying which loops bound surfaces or not can be used to classify shapes of things inside space. So, for example, one of the founding achievements of topology in the 19th century was to classify surfaces in space -- -- by trying to look at loops on them. So, what I mean by that is that if I take the surface of a sphere, well, I claim the surface of a sphere –
OK, hãy để tôi đề cập rất nhanh về topology thú vị trong không gian. Vâng, ví dụ, khái niệm về miền đơn liên hoặc không, và nghiên cứu các vòng bao quanh các bề mặt hoặc không, chúng có thể được dùng để phân loại hình dạng các thứ bên trong không gian. Vì vậy, ví dụ, một trong những thành tựu nền tảng của topo trong thế kỷ 19 là phân loại

các bề mặt trong không gian - - bằng cách tìm vòng trên chúng. Vâng, điều đó có nghĩa là nếu tôi chọn bề mặt của một hình cầu, vâng, tôi khẳng định bề mặt của một hình cầu -

-- is simply connected. Why is that? Well, let's take my favorite closed curve on the surface of a sphere. I can always find a portion of the sphere that's bounded by it. OK, so that's the definition of the surface of a sphere being simply connected. On the other hand, if I take what's called a torus, or if you prefer, the surface of a doughnut, that's more, it's a less technical term, but it's –
- là đơn liên. Tại sao vậy? Vâng, giả sử rằng đường cong kín yêu thích của tôi nằm trên bề mặt của hình cầu. Tôi luôn luôn tìm được phần của hình cầu được nó bao quanh. OK, vì vậy đó là định nghĩa của bề mặt của một hình cầu là đơn liên. Mặt khác, nếu tôi chọn một torus, nó giống như, bề mặt của cái bánh rán, nó hơi, đó là thuật ngữ không khoa học, nhưng nó -

-- well, that's not simply connected. And, in fact, for example, if you look at this loop here that goes around it, well, of course it bounds a surface in space. But, that surface cannot be made to be just a piece of the donut. You have to go through the hole. You have to leave the surface of a torus. In fact, there's another one. See, this one also does not bound anything that's completely contained in the torus. And, of course, it bounds this disc, but inside of a torus. But, that's not a part of the surface itself. So, in fact, there's, and topologists would say, there's two independent –
- vâng, cái đó không đơn liên. Và, quả thực, ví dụ, nếu bạn xét vòng này ở đây đi xung quanh nó, vâng, tất nhiên nó bao quanh một bề mặt trong không gian. Tuy nhiên, bề mặt đó không phải là một phần của bánh rán. Bạn phải đi qua lỗ. Bạn phải rời khỏi bề mặt của torus. Quả thực, có một cái khác. Thấy không, cái này cũng không bao quanh bất cứ thứ gì được chứa trong torus. Và, tất nhiên, nó bao quanh hình tròn này, nhưng bên trong của torus. Nhưng, đó là một phần của chính bề mặt. Vì vậy, trên thực tế, có, và các nhà topo sẽ nói, có hai -

-- loops that don't bound surfaces, that don't bound anything. And, so this number two is somehow an invariant that you can associate to this kind of shape. And then, if you consider more complicated surfaces with more holes in them, you can try, somehow, to count independent loops on them, and that's the beginning of the classification of surfaces. Anyway, that's not really an 18.02 topic, but I thought I would mentioned it because it's kind of a cool idea.
- vòng độc lập không bao quanh các bề mặt, không bao quanh bất cứ thứ gì. Và, vì vậy số hai này là bất biến gắn liền với loại hình dạng này. Và sau đó, nếu bạn xét các bề mặt phức tạp hơn với lỗ nhiều hơn trên chúng, bạn có thể thử, bằng cách nào đó, để đếm số vòng độc lập trên chúng, và đó là sự khởi đầu của việc phân loại bề mặt. Dù sao đi nữa, đó không thực sự là chủ đề của 18,02, nhưng tôi đề cập đến nó bởi vì nó là một ý tưởng khá thú vị.

OK, let me say a bit more in the way of fun remarks like that. So, food for thought: let's say that I want to apply Stokes theorem to simplify a line integral along the curve here. So, this curve is maybe not easy to see in the picture. It kind of goes twice around the z axis, but spirals up and then down. OK, so one way to find a surface that's bounded by this curve is to take what's called the Mobius strip. OK, so the Mobius strip, it's a one sided strip where when you go around, you flip one side becomes the other. So, you just, if you want to take a band of paper and glue the two sides with a twist, so, it's a one sided surface.
OK, hãy để tôi nói thêm một chút về những điều thú vị như thế. Vâng, thực phẩm cho tư duy: giả sử rằng tôi muốn áp dụng định lý Stokes để đơn giản hóa tích phân đường dọc theo đường cong ở đây. Vâng, đường cong này có lẽ không dễ thấy trên hình. Nó đi hai lần quanh trục z, nhưng xoắn ốc lên và sau đó xuống. OK, do đó, một cách để tìm một bề mặt được bao quanh bởi đường cong này là chọn băng Mobius. OK, do đó, băng Mobius, đó là băng một phía mà khi bạn đi quanh nó, bạn lật một phía thành bên kia. Vâng, bạn có thể thử, bằng cách lấy một băng giấy và dán hai phía ở chổ xoắn, do đó, nó là bề mặt một phía.

And, that gives us, actually, serious trouble if we try to orient it to apply Stokes theorem. So, see, for example, if I take this Mobius strip, and I try to find an orientation, so here it looks like that, well, let's say that I've oriented my curve going in this direction. So, I go around, around, around, still going this direction. Well, the orientation I should have for Stokes theorem is that when I, so, curve continues here. Well, if you look at the convention around here, it tells us that the normal vector should be going this way. OK, if we look at it near here, if we walk along this way, the surface is to our right .
Và, điều đó cho chúng ta, thực sự, một vấn đề nghiêm trọng nếu chúng ta thử định hướng nó để áp dụng định lý Stokes. Vì vậy, thấy không, ví dụ, nếu tôi dùng băng Mobius này, và tôi cố gắng tìm một sự định hướng, vâng ở đây có vẻ như, vâng, giả sử rằng tôi đã định hướng đường cong của tôi theo hướng này. Vì vậy, tôi đi xung quanh, xung quanh, xung quanh, vẫn đi theo hướng này. Vâng, định hướng mà tôi sẽ có cho định lí Stokes là khi tôi, vâng, đường cong liên tục ở đây. Vâng, nếu bạn xét quy ước quanh đây, nó cho chúng ta biết rằng vector pháp tuyến sẽ đi theo hướng này. OK, nếu chúng ta xét nó gần đây, nếu chúng ta đi dọc theo đường này, bề mặt sẽ ở bên phải chúng ta.

So, we should actually be flipping things upside down. The normal vector should be going down. And, in fact, if you try to follow your normal vector that's pointing up, it's pointing up, up, up. It will have to go into things, into, into, down. There's no way to choose consistently a normal vector for the Mobius strip. So, that's what we call a non-orientable surface. And, that just means it has only one side. And, if it has only one side, that we cannot speak of flux for it because we have no way of saying that we'll be counting things positively one way, negatively the other way, because there's only one, you know, there's no notion of sides. So, you can't define a side towards which things will be going positively. So, that's actually a situation where flux cannot be defined.
Vì vậy, chúng ta thực sự đang đảo các thứ lộn ngược. Vector pháp tuyến sẽ hướng xuống. Và, quả thực, nếu bạn thử cho vector pháp tuyến của bạn hướng lên, nó đang hướng lên, lên, lên. Nó sẽ phải đi vào các thứ, vào trong, vào trong, xuống. Không có cách cố định nào để chọn một vector pháp tuyến cho băng Mobius. Vì vậy, chúng ta gọi đó là bề mặt không định hướng. Và, điều đó có nghĩa là nó chỉ có một mặt. Và, nếu nó chỉ có một mặt, chúng ta không thể nói về thông lượng đối với nó bởi vì chúng ta không thể nói rằng chúng ta tính các thứ dương theo đường nào, âm theo đường nào, bởi vì chỉ có một, bạn biết, không có khái niệm về các phía. Vì vậy, bạn không thể xác định phía dương. Vì vậy, đó thực sự là một trường hợp thông lượng không xác định.

OK, so as much as Mobius strips and climb-bottles are exciting and really cool, well, we can't use them in this class because we can't define flux through them. So, if we really wanted to apply Stokes theorem, because I've been telling you that space is simply connected, and I will always be able to apply Stokes theorem to any curve,

what would I do? Well, I claim this curve actually bounds another surface that is orientable.
OK, do đó thậm chí các băng Mobius và các dây leo quanh chay là thú vị và thực sự hấp dẫn, vâng, chúng ta không thể dùng chúng trong môn này bởi vì chúng ta không thể xác định thông lượng qua chúng. Vì vậy, nếu chúng ta thực sự muốn áp dụng định lý Stokes, bởi vì tôi đã nói với bạn rằng không gian là đơn liên, và tôi sẽ luôn luôn có thể áp dụng định lý Stokes cho bất kỳ đường cong nào, tôi sẽ làm gì? Vâng, tôi cho rằng đường cong này thực sự sẽ bao quanh bề mặt có thể định hướng.

Yeah, that looks counterintuitive. Well, let's see it. I claim you can take a hemisphere, and you can take a small thing and twist it around. So, in case you don't believe me, let me do it again with the transparency. Here's my loop, and see, well, the scale is not exactly the same. So, it doesn't quite match. But, and it's getting a bit dark. But, that spherical thing with a little slit going twisting into it will actually have boundary my loop. And, that one is orientable. I mean, I leave it up to you to stare at the picture long enough to convince yourselves that there's a well-defined up and down. OK.
Yeah, điều đó không dễ nhận ra. Vâng, chúng ta hãy xét nó. Tôi cho rằng bạn có thể lấy một bán cầu, và bạn có thể lấy một vật nhỏ và xoắn quanh nó. Vì vậy, trong trường hợp bạn không tin tôi, hãy để tôi thực hiện lại nó một cách minh bạch. Đây là vòng của tôi, và thấy không, vâng, tỷ lệ không giống chính xác. Vì vậy, nó không hoàn toàn khớp. Nhưng, và nó trở nên tối hơn một chút. Nhưng vật hình cầu đó với một khe nhỏ xoắn vào trong nó sẽ có biên là vòng của tôi. Và, cái đó có thể định hướng được. Ý tôi là, tôi để bạn nhìn vào hình đủ lâu để tự thuyết phục bạn rằng ở đó được xác định lên và xuống. OK.

So now, I mean, in case you are getting really, really worried, I mean, there won't be any Mobius strips on the exam on Tuesday, OK? It's just to show you some cool stuff. OK, questions? No? OK, one last thing I want to show you before we start reviewing, so one question you might have about Stokes theorem is, how come we can choose whatever surface we want? I mean, sure, it seems to work, but why?
Vì vậy, bây giờ, ý tôi là, trong trường hợp bạn đang trở nên thực sự, thực sự lo lắng, ý tôi là, sẽ không có dải băng Mobius nào trong bài kiểm tra vào thứ ba, OK? Tôi chỉ đang chỉ cho bạn một số điều thú vị. OK, câu hỏi? Không có? OK, điều cuối cùng tôi muốn chỉ cho bạn trước khi chúng ta bắt đầu ôn tập, một vấn đề nữa nảy sinh trong định lí Stokes là, làm thế nào để chúng ta có thể chọn bất cứ bề mặt nào chúng ta muốn? Ý tôi là, chắc chắn, điều đó dường như có thể thực hiện được, nhưng tại sao?

So, I'm going to say a couple of words about surface independence in Stokes theorem. So, let's say that I have a curve, C, in space. And, let's say that I want to apply Stokes theorem. So, then I can choose my favorite surface bounded by C. So, in a situation like this, for example, I might want to make my first choice be this guy, S1, like maybe some sort of upper half sphere. And, if you pay attention to the orientation conventions, you'll see that you need to take it with normal vector pointing up. Maybe actually I would rather make a different choice.
Vì vậy, tôi sẽ nói vài điều về sự không phụ thuộc bề mặt trong định lí Stokes. Vâng , giả sử rằng tôi có một đường cong, C, trong không gian. Và, giả sử rằng tôi muốn áp dụng định lí Stokes. Vâng, thế thì tôi có thể chọn bề mặt yêu thích của tôi được bao quanh bởi C. Vì vậy, trong trường hợp như thế này, ví dụ, tôi có thể muốn thực hiện chọn lựa đầu tiên là thằng này, S1, có thể là nửa trên của hình cầu nào đó. Và, nếu bạn chú ý đến quy ước định hướng, bạn sẽ thấy rằng bạn cần phải chọn nó với vector pháp tuyến hướng lên. Có lẽ tôi muốn thực hiện một sự chọn lựa khác.

And actually, I will choose another surface, S2, that maybe looks like that. And, if I look carefully at the orientation convention, Stokes theorem tells me that I have to take the normal vector pointing up again. So, that's actually into things. So, Stokes says that the line integral along C of my favorite vector field can be computed either as a flux integral for the curl through S1, or as the same integral, but through S2 instead of S1.
Và thực sự, tôi sẽ chọn một bề mặt, S2, có thể có dạng như thế. Và, nếu tôi xem xét cẩn thận quy ước định hướng, định lý Stokes cho tôi biết rằng tôi lại phải chọn vector pháp tuyến hướng lên. Vì vậy, nó thực sự đi vào trong các thứ. Vì vậy, Stokes nói rằng tích phân đường dọc theo C của trường vector yêu thích của tôi có thể được tính hoặc như là thông lượng đối với curl qua S1, hoặc như tích phân tương tự, nhưng qua S2 thay vì S1.

So, that seems to suggest that curl F has some sort of surface independence property. It doesn't really matter which surface I take, as long as the boundary is this given curve, C. Why is that? That's a strange property to have. Where does it come from? Well, let's think about it for a second. So, why are these the same? I mean, of course, they have to be the same because that's what Stokes tell us. But, why is that OK? Well, let's think about comparing the flux integral for S1 and the flux integral for S2. So, if we want to compare them, we should probably subtract them from each other. OK, so let's do the flux integral for S1 minus the flux integral for S2 of the same thing.
Vì vậy, hàm ý của điều đó là curl F có tính chất không phụ thuộc vào bề mặt. Tôi chọn bề mặt nào không quan trọng, miễn là biên là đường cong C này. Tại sao vậy? Đó là một tính chất lạ. Nguyên nhân do đâu? Vâng, chúng ta hãy suy nghĩ về nó một chút. Vì vậy, tại sao những thằng này giống nhau? Ý tôi là, tất nhiên, chúng phải giống nhau bởi vì đó là những gì Stokes cho chúng ta biết. Tuy nhiên, tại sao điều đó OK? Vâng, chúng ta hãy nghĩ về việc so sánh tích phân thông lượng cho S1 và tích phân thông lượng cho S2. Vì vậy, nếu chúng ta muốn so sánh chúng, chúng ta có thể trừ chúng với nhau. OK, vậy chúng ta hãy tính tích phân thông lượng đối với S1 trừ tích phân thông lượng đối với S2 của cùng một thứ.

Well, let's give a name. Let's call S the surface S1 minus S2. So, what is S? S is S1 with its given orientation together with S2 with the reversed orientation. So, S is actually this whole closed surface here. And, the normal vector to S seems to be pointing outwards everywhere. OK, so now, if we have a closed surface with a normal vector pointing outwards, and we want to find a flux integral for it, well, we can replace that with a triple integral. So, that's the divergence theorem. So, that's by the divergence theorem using the fact that S is a closed surface.
Vâng, hãy đặt tên. Hãy gọi S là bề mặt S1 trừ S2. Vậy, S là gì? S là S1 với sự định hướng cho trước của nó cùng với S2 với sự định hướng đảo ngược. Vì vậy, S thực sự là toàn bộ bề mặt đóng này ở đây. Và, vector pháp tuyến của S dường như hướng ra phía ngoài ở mọi nơi. OK, vậy bây giờ, nếu chúng ta có một bề mặt đóng với vector pháp tuyến hướng ra ngoài, và chúng ta muốn tìm tích phân thông lượng cho nó, vâng, chúng ta có thể thay thế nó bằng một tích phân ba lớp. Vì vậy, đó là định lý phân kỳ. Vì vậy, đó là bởi vì định lý

divergence dùng sự kiện S là bề mặt khép kín.

That's equal to the triple integral over the region inside. Let me call that region D of divergence, of curl F dV. OK, and what I'm going to claim now is that we can actually check that if you take the divergence of the curl of a vector field, you always get zero. OK, and so that will tell you that this integral will always be zero. And that's why the flux for S1, and the flux for S2 were the same a priori and we didn't have to worry about which one we chose when we did Stokes theorem. OK, so let's just check quickly that divergence of a curve is zero.
Nó bằng tích phân ba lớp trên vùng bên trong. Hãy để tôi gọi đó là vùng D của divergence, của curl F dV. OK, và bây giờ tôi khẳng định rằng nếu bạn lấy divergence của curl của một trường vector, bạn luôn luôn nhận được kết quả bằng không. OK, và vì vậy điều đó sẽ cho chúng ta biết rằng tích phân sẽ luôn luôn bằng không. Và đó là lí do tại sao thông lượng qua S1, và thông lượng qua S2 giống nhau và chúng ta không phải lo lắng về việc chọn cái nào khi chúng ta dùng định lý Stokes. OK, vì vậy chỉ cần kiểm tra điều kiện divergence của curl có bằng 0 hay không.

OK, in case you're wondering why I'm doing all this, well, first I think it's kind of interesting, and second, it reminds you of a statement of all these theorems, and all these definitions. So, in a way, we are already reviewing. OK, so let's see. If my vector field has components P, Q, and R, remember that the curl was defined by this cross product between del and our given vector field. So, that's Ry - Qz followed by Pz - Rx, and Qx - Py. So, now, we want to take the divergence of this.
OK, trong trường hợp bạn đang tự hỏi tại sao tôi làm tất cả điều này, vâng, đầu tiên tôi nghĩ rằng nó khá thú vị, và thứ hai, nó giuwsp bạn nhớ lại nội dung của tất cả những định lí này, và tất cả những định nghĩa. Vì vậy, dường như chúng ta đã ôn tập rồi. OK, do đó, hãy xem. Nếu trường vector của tôi có thành phần P, Q, R, hãy nhớ rằng curl được xác định bởi tích vector giữa del và trường vector của chúng ta. Vì vậy, đó là Ry - Qz tiếp theo là Pz - Rx, và Qx - Py. Vì vậy, bây giờ, chúng ta muốn tính divergence của cái này.

Well, so we have to take the first component, Ry minus Qz, and take its partial with respect to x. Then, take the y component, Pz minus Rx partial with respect to y plus Qx minus Py partial with respect to z. And, well, now we should expand this. But I claim it will always simplify to zero. OK, so I think we have over there, becomes R sub yx minus Q sub zx plus P sub zy minus R sub xy plus Q sub xz minus P sub yz.
Vâng, vì vậy chúng ta phải lấy thành phần thứ nhất, Ry trừ Qz, và lấy đạo hàm của nó theo x. Sau đó, lấy thành phần y, Pz trừ Rx đạo hàm riêng theo y cộng với Qx trừ Py đạo hàm riêng theo z. Và, vâng, bây giờ chúng ta sẽ khai triển cái này. Nhưng tôi cho rằng nó luôn luôn được đơn giản bằng không. OK, vì vậy tôi nghĩ chúng ta có trên kia, trở thành R yx trừ Q zx cộng Pzy trừ R xy cộng Q xz trừ P yz.

Well, let's see. We have P sub zy minus P sub yz. These two cancel out. We have R sub yx minus R sub xy. These cancel out. Q sub zx and Q sub xz, these two also cancel out. So, indeed, the divergence of a curl is always zero. OK, so the claim is divergence of curl is always zero. Del cross F is always zero, and just a small remark, if we had actually real vectors rather than this strange del guy, indeed we know that if we have two vectors, U and V, and we do u dot u cross v, what is that?
Vâng, xem nào. Chúng ta có P zy trừ P yz. Hai cái này triệt tiêu. Chúng ta có R yx trừ R xy. Những cái này triệt tiêu. Q zx và Q xz, hai cái này cũng triệt tiêu. Vì vậy, thực vậy, divergence của curl luôn bằng không. OK, vì vậy divergence của curl luôn bằng không. Del chéo F luôn luôn bằng không, và một nhận xét nhỏ nữa, nếu chúng ta có các vector thực thay vì thằng del lạ này, quả thật chúng ta biết rằng nếu chúng ta có hai vectơ, U và V, và chúng ta tính u dot u chéo v, nó bằng gì?

Well, one way to say it is it's the determinant of u, u, and v, which is the volume of the box. But, it's completely flat because u, u, and v are all in the plane defined by u and v. The other way to say it is that u cross v is perpendicular to u and v. Well, if it's perpendicular u, then its dot product with u will be zero. So, no matter how you say it, this is always zero. So, in a way, this reinforces our intuition that del, even though it's not at all an actual vector sometimes can be manipulated in the same way.
Vâng, một cách nói là nó là định thức của u, u, và v, là thể tích của hộp. Tuy nhiên, nó hoàn toàn phẳng bởi vì u, u, và v đều nằm trong mặt phẳng được xác định bởi u và v. Cách diễn đạt khác là nói rằng u chéo v vuông góc với u và v. Vâng, nếu nó vuông góc với u, thì tích vô hướng của nó với u sẽ bằng không. Vì vậy, bạn nói cách nào cũng được, cái này luôn bằng không. Vì vậy, theo cách nào đó, điều này củng cố khả năng trực giác của chúng ta rằng del, mặc dù nó không phải là vector thực sự thỉnh thoảng nó lại có thể được thao tác theo cách tương tự như một vector trong tính toán.
Môn này kết thúc ở đây, phần còn lại là phần ôn tập.
OK, I think that's it for new topics for today. And, so, now I should maybe try to recap quickly what we've learned in these past three weeks so that you know, so, the exam is probably going to be similar in difficulty to the practice exams. That's my goal. I don't know if I will have reached that goal or not. We'll only know that after you've taken the test. But, the idea is it's meant to be more or less the same level of difficulty. So, at this point, we've learned about three kinds of beasts in space.

OK, so I'm going to divide my blackboard into three pieces, and here I will write triple integrals. We've learned about double integrals, and we've learned about line integrals. OK, so triple integrals over a region in space, we integrate a scalar quantity, dV. How do we do that? Well, we can do that in rectangular coordinates where dV becomes something like, maybe, dz dx dy, or any permutation of these.

We've seen how to do it also in cylindrical coordinates where dV is maybe dz times r dr d theta or more commonly r dr d theta dz. But, what I want to emphasize in this way is that both of these you set up pretty much in the same way. So, remember, the main trick here is to find the bounds of integration. So, when you do it, say, with dz first, that means for fixed xy, so, for a fixed point in the xy plane, you have to look at the bounds for z. So, that means you have to figure out what's the bottom surface of your solid, and what's the top surface of your solid? And, you have to find the value of z at the bottom, the value of z at the top as functions of x and y.

And then, you will put that as bounds for z. Once you've done that, you are left with the question of finding bounds for x and y. Well, for that, you just rotate the picture, look at your solid from above, so, look at its projection to the xy plane, and you set up a double integral either in rectangular xy coordinates, or in polar coordinates for x and y. Of course, you can always do it a different orders. And, I'll let you figure out again how that goes. But, if you do dz first, then the inner bounds are given by bottom and top, and the outer ones are given by looking at the shadow of the region. Now, there's also spherical coordinates. And there, we've seen that dV is rho squared sine phi d rho d phi d theta. So now, of course, if this orgy of Greek letters is confusing you at this point, then you probably need to first review spherical coordinates for themselves.

Remember that rho is the distance from the origin. Phi is the angle down from the z axis. So, it's zero, and the positive z axis, pi over two in the xy plane, and increases all the way to pi on the negative z axis. And, theta is the angle around the z axis. So, now, when we set up bounds here, it will look a lot like what you've done in polar coordinates in the plane because when you look at the inner bound down on rho, for a fixed phi and theta, that means you're shooting a straight ray from the origin in some direction in space.

So, you know, you're sending a laser beam, and you want to know what part of your beam is going to be in your given solid. You want to solve for the value of rho when you enter the solid and when you leave it. I mean, very often, if the origin is in your solid, then rho will start at zero. Then you want to know when you exit. And, I mean, there's a fairly small list of kinds of surfaces that we've seen how to set up in spherical coordinates. So, if you're really upset by this, go over the problems in the notes. That will give you a good idea of what kinds of things we've seen in spherical coordinates.

OK, and then evaluation is the usual way. Questions about this? No? OK, so, I should say we can do something bad, but so we've seen, of course, applications of this. So, we should know how to use a triple integral to evaluate things like a mass of a solid, the average value of a function, the moment of inertia about one of the coordinate axes, or the gravitational attraction on a mass at the origin.

OK, so these are just formulas to remember for examples of triple integrals. It doesn't change conceptually. You always set them up and evaluate them the same way. It just tells you what to put there for the integrand. Now, double integrals: so, when we have a surface in space, well, what we will integrate on it, at least what we've seen how to integrate is a vector field dotted with the unit normal vector times the area element. OK, and this is sometimes called vector dS.

Now, how do we evaluate that? Well, we've seen formulas for ndS in various settings. And, once you have a formula for ndS, that will relate ndS to maybe dx dy, or something else. And then, you will express, so, for example, ndS equals something dx dy. And then, it becomes a double integral of something dx dy. Now, in the integrand, you want to express everything in terms of x and y. So, if you had a z, maybe you have a formula for z in terms of x and y. And, when you set up the bounds, well, you try to figure out what are the bounds for x and y? That would be just looking at it from above. Of course, if you are using other variables, figure out the bounds for those variables.

And, when you've done that, it becomes just a double integral in the usual sense. OK, so maybe I should be a bit more explicit about formulas because there have been a lot. So, let me tell you about a few of them. Let me actually do that over here because I don't want to make this too crowded. OK, so what kinds of formulas for ndS have we seen? Well, we've seen a formula, for example, for a horizontal plane, or for something that's parallel to the yz plane or the xz plane. Well, let's do just the yz plane for a quick reminder. So, if I have a surface that's contained inside the yz plane, then obviously I will express ds in terms of, well, I will use y and z as my variables. So, I will say that ds is dy dz, or dz dy, whatever's most convenient.

Maybe we will even switch to polar coordinates after that if a problem wants us to. And, what about the normal vector? Well, the normal vector is either coming straight at us, or it's maybe going back away from us depending on which orientation we've chosen. So, this gives us ndS. We dot our favorite vector field with it. We integrate, and we get the answer. OK, we've seen about spheres and cylinders centered at the origin or centered on the z axis. So, the normal vector sticks straight out or straight in, depending on which direction you do it in. So, for a sphere, the normal vector is <x, y, z> divided by the radius of the sphere.

For a cylinder, it's <x, y, 0>, divided by the radius of a cylinder. And, the surface element on a sphere, so, see, it's very closely related to the volume element of spherical coordinates except you don't have a rho anymore. You just plug in a rho equals a. So, you get a squared sine phi d phi d theta. And, for a cylinder, it would be a dz d theta. So, by the way, just a quick check, when you're doing an integral, if it's the surface integral, there should be two integral signs, and there should be two integration variables. And, there should be two d somethings. If you end up with a dx, dy, dz in the surface integral, something is seriously wrong.

OK, now, besides these specific formulas, we've seen two general formulas that are also useful. So, one is, if we know how to express z in terms of x and y, and just to change notation to show you that it's not set in stone, let's say that z is known as a function z of x and y. So, how do I get ndS in that case? Well, we've seen a formula that says negative partial z partial x, negative partial z partial y, one dx dy. So, this formula relates the volume, sorry, the surface element on our surface to the area element in the xy plane. It lets us convert between dS and dx dy.

OK, so we just plug in this, and we dot with F, and then we substitute everything in terms of x and y, and we evaluate the integral over x and y. If we don't really want to find a way to find z as a function of x and y, but we have a normal vector given to us, then we have another formula which says that ndS is, sorry, I should have said it's always up to sign because we have a two orientation convention.

We have to decide based on what we are trying to do, whether we are doing the correct convention or the wrong one. So, the other formula is n over n dot k dx dy. Sorry, are they all the same? Well, if you want, you can put an absolute value here. But, it doesn't matter because it's up to sign anyway. So, I mean, this formula is valid as it is. OK, and, I mean, if you're in a situation where you can apply more than one formula, they will all give you the same answer in the end because it's the same flux integral. OK, so anyway, so we have various ways of computing surface integrals, and probably one of the best possible things you can do to prepare for the test is actually to look again at some practice problems from the notes that do flux integrals over various kinds of surfaces because that's probably one of the hardest topics in this unit of the class.

OK, anyway, let's move on to line integrals. So, those are actually a piece of cake in comparison, OK, because all that this is, is just integral of P dx Q dy R dz. And, then all you have to do is parameterize the curve, C, to express everything in terms of a single variable. And then, you end up with a usual single integral, and you can just compute it. So, that one works pretty much as it did in the plane. So, if you forgotten what we did in the plane, it's really the same thing.

OK, so now we have three different kinds of integrals, and really, well, they certainly have in common that they integrate things somehow. But, apart from that, they are extremely different in what they do. I mean, this one involves a function, a scalar quantity. These involve vector quantities. They don't involve the same kinds of shapes over which to integrate. Here, you integrate over a three-dimensional region. Here, you integrate only over a two-dimensional surface, and here, only a one-dimensional curve. So, try not to confuse them. That's basically the most important advice. Don't get mistaken. Each of them has a different way of getting evaluated. Eventually, they will all give you numbers, but through different processes.

So now, well, I said these guys are completely different. Well, they are, but we still have some bridges between them. OK, so we have two, maybe I should say three, well, two bridges between these guys. OK, so we have somehow a connection between these which is the divergence theorem. We have a connection between that, which is Stokes theorem. So -- Just to write them again, so the divergence theorem says if I have a region in space, and I call its boundary S, so, it's going to be a closed surface, and I orient S with a normal vector pointing outwards, then whenever I have a surface integral over S, sorry, I can replace it by a triple integral over the region inside.

OK, so this guy is a vector field. And, this guy is a function that somehow relates to the vector field. I mean, you should know how. You should know the definition of divergence, of course. But, what I want to point out is if you have to compute the two sides separately, well, this is just, you know, your standard flux integral. This is just your standard triple integral over a region in space. Once you have computed what this guy is, it's really just a triple integral of the function.

So, the way in which you compute it doesn't see that it came from a divergence. It's just the same way that you would compute any other triple integral. The way we compute it doesn't depend on what actually we are integrating. Stokes theorem says if I have a curve that's the boundary of a surface, S, and I orient the two in compatible manners, then I can replace a line integral on C by a surface integral on S.

OK, and that surface integral, well, it's not for the same vector field. This relates a line integral for one field to a surface integral from another field. That other field is given from the first one just by taking its curl So, after you take the curl, you obtain a different vector field. And, the way in which you would compute the surface integral is just as with any surface integral. You just find a formula for ndS dot product, substitute, evaluate. The calculation of this thing, once you've computed curl does not remember that it was a curl. It's the same as with any other flux integral. OK, and finally, the last bridge, so this was between two and three. This was between one and two.

Let me just say, there's a bridge between zero and one, which is that if you have a function in its gradient, well, the fundamental theorem of calculus says that the line integral for the vector field given by the gradient of a function is actually equal to the change in value of a function. That's if you have a curve bounded by P0 and P1. So in a way, actually, each of these three theorems relates a quantity with a certain number of integral signs to a quantity with one more integral sign.

And, that's actually somehow a fundamental similarity between them. But maybe it's easier to think of them as completely different stories. So now, with this one, we additionally have to remember another topic is given a vector field, F, with curl equal to zero, find the potential. And, we've seen two methods for that, and I'm sure you remember them. So, if not, then try to remember them for Tuesday. OK, so anyway, again, conceptually, we have, really, three different kinds of integrals. We evaluated them in completely different ways, and we have a handful of theorems, connecting them to each other. But, that doesn't have any impact on how we actually compute things.

OK, have a nice weekend. Try to get some work for the test. Try to get some sleep as well, and see you on Tuesday.