18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 31

Định lí Stokes

Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

Recall that yesterday we saw, no, two days ago we learned about the curl of a vector field in space. And we said the curl of F is defined by taking a cross product between the symbol dell and the vector F. Concretely, the way we would compute this would be by putting the components of F into this determinant and expanding and then getting a vector with components Ry minus Qz, Pz minus Rx and Qx minus Py.
Nhớ lại rằng hôm qua chúng ta đã học, không, hai ngày trước chúng ta đã học về curl của một trường vectơ trong không gian. Và chúng ta đã nói curl của F được định nghĩa là tích vector giữa del và vector F. Cụ thể, chúng ta sẽ tính cái này bằng cách đặt các thành phần của F vào trong định thức và khai triển và sau đó nhận được một vector với các thành phần là Ry trừ Qz, Pz trừ Rx và Qx trừ Py.

I think I also tried to explain very quickly what the significance of a curl is. Just to tell you again very quickly, basically curl measures, if you mention that your vector field measures the velocity in some fluid then the curl measures how much rotation is taking place in that fluid. Measures the rotation part of a velocity field. More precisely the direction corresponds to the axis of rotation and the magnitude corresponds to twice the angular velocity.
Tôi cũng đã giải thích sơ lược về ý nghĩa của curl. Nói một cách ngắn gọn, về cơ bản curl đo, nếu như trường vector đo vận tốc trong chất lưu nào đó thì curl đo sự quay xảy ra trong chất lưu đó nhiều bao nhiêu. Đo phần quay của trường vận tốc. Chính xác hơn là hướng tương ứng với trục quay và độ lớn tương ứng bằng hai lần vận tốc góc.

Just to give you a few quick examples. If I take a constant vector field, so everything translates at the same speed, then obviously when you take the partial derivatives you will just get a bunch of zeros so the curl will be zero. If you take a vector field that stretches things, let's say, for example, we are going to stretch things along the x-axis, that would be a vector field that goes parallel to the x direction but maybe, say, x times i.
Hãy xét một ví dụ nhỏ. Nếu tôi chọn một trường vector hằng số, nghĩa là mọi thứ dịch chuyển với tốc độ như nhau, thì rõ ràng khi bạn lấy đạo hàm riêng bạn sẽ chỉ nhận được một chuỗi các số không vì vậy curl sẽ bằng không. Nếu bạn chọn một trường vector kéo giãn các thứ ra, ví dụ, chúng ta sẽ kéo các thứ dọc theo trục x, đó sẽ là một trường vector song song với hướng x nhưng có lẽ, giả sử, x nhân i.

So that when you are in front of a plane of a blackboard you are moving forward, when you are behind you are moving backwards, things are getting expanded in the x direction. If you compute the curl, you can check each of these. Again, they are going to be zero. There is no curl. This is not what curl measures. I mean, actually, what measures expansion, stretching is actually divergence. If you take the divergence of this field, you would get one plus zero plus zero, it looks like it will be one, so in case you don't remember, I mean divergence precisely measures this stretching effect in your field. And, on the other hand, if you take something that corresponds to, say, rotation about the z-axis at unit angular velocity –
Vì vậy khi bạn đang ở phía trước mặt phẳng bảng đen bạn di chuyển về phía trước, khi bạn ở phía sau bạn sẽ di chuyển về phía sau , các thứ trở nên bị giãn nở theo hướng x. Nếu bạn tính curl, bạn có thể kiểm tra từng cái này. Một lần nữa, chúng sẽ bằng không. Không có curl. Đây không phải là những gì curl đo. Ý tôi là, trên thực tế, đại lượng đặc trưng cho sự giãn nở, kéo căng thực sự là divergencree. Nếu bạn tính divergence của trường này,

bạn sẽ nhận được một cộng không cộng không, kết quả bằng một, do đó trong trường hợp bạn không nhớ, tôi sẽ nói chính xác là divergence đo hiệu ứng kéo căng này trong trường của bạn. Và, mặt khác, nếu bạn chọn một loại trường tương ứng với, chẳng hạn như, sự quay quanh trục z với vận tốc góc đơn vị -

That means they are going to moving in circles around the z-axis. One way to write down this field, let's see, the z component is zero because everything is moving horizontally. And in the x and y directions, if you look at it from above, well, it is just going to be our good old friend the vector field that rotates everything [at unit speed?]. And we have seen the formula for this one many times. The first component is minus y, the second one is x. Now, if you compute the curl of this guy, you will get zero, zero, two, two k. And so k is the axis of rotation, two is twice the angular velocity. And now, of course, you can imagine much more complicated motions where you will have –
Điều đó có nghĩa là chúng sẽ di chuyển trên các đường tròn quanh trục z. Một cách để viết ra trường này, xem nào, thành phần z bằng không bởi vì tất cả mọi thứ chuyển động theo phương ngang. Và theo các hướng x và y, nếu bạn nhìn nó từ phía trên, vâng, nó chính là người bạn cũ của chúng ta trường vector quay mọi thứ [với tốc độ đơn vị?]. Và chúng ta đã thấy công thức của nó nhiều lần. Thành phần thứ nhất là trừ y, thứ hai là x. Bây giờ, nếu bạn tính curl của thằng này, kết quả sẽ bằng không, không, hai, hai k. Và như vậy k là trục quay, hai là hai lần vận tốc góc. Và bây giờ, tất nhiên, bạn có thể tưởng tượng ra các chuyển động phức tạp hơn nhiều trong đó bạn sẽ có -

For example, if you look at the Charles River very carefully then you will see that water is flowing, generally speaking, towards the ocean. But, at the same time, there are actually a few eddies in there and with water swirling. Those are the places where there is actually curl in the flow. Yes. I don't know how to turn out the lights a bit, but I'm sure there is a way. Does this do it? Is it working? OK. You're welcome.
Ví dụ, nếu bạn nhìn kĩ sông Charles thì bạn sẽ thấy rằng nước sẽ chảy, nói chung, về phía đại dương. Nhưng, đồng thời, có một vài xoáy nước trong đó và nước đang xoáy. Đó là những nơi thực sự có curl trong dòng chảy. Vâng. Tôi không biết cách tắt đèn, nhưng tôi chắc chắn có một cách. Cái này có làm nó không? Nó đang hoạt động phải không? OK. Không cơ chi.

Hopefully it is easier to see now. That was about curl. Now, why do we care about curl besides this motivation of understanding motions? One place where it comes up is when we try to understand whether a vector field is conservative. Remember we have seen that a vector field is conservative if and only if its curl is zero. That is the situation in which we are allowed to try to look for a potential function and then use the fundamental theorem.
Hy vọng rằng nó sẽ dễ thấy vào lúc này. Đó là về curl. Bây giờ, tại sao chúng ta quan tâm về curl trong khi khảo sát chuyển động? Một nơi mà nó xuất hiện là khi chúng ta tìm hiểu xem một trường vector có bảo toàn hay không. Hãy nhớ rằng chúng ta đã thấy rằng một trường vector là bảo toàn nếu và chỉ nếu curl của nó bằng không. Đó là trường hợp mà ở đó chúng ta được phép tìm hàm thế và sau đó dùng định lí cơ bản.

But another place where this comes up, if you remember what we did in the plane, curl also came up when we tried to convert nine integrals into double integrals. That was Greene's theorem. Well, it turns out we can do the same thing in space and that is called Stokes' theorem. What does Stokes' theorem say? It says that the work done by a vector field along a closed curve can be replaced by a double integral of curl F. Let me write it using the dell notation. That is curl F. Dot ndS on a suitably chosen surface. That is a very strange kind of statement.
Nhưng ta còn gặp nó ở một nơi khác, nếu bạn nhớ những gì chúng ta đã làm trong mặt phẳng, curl cũng xuất hiện khi chúng ta chuyển tích phân đường thành tích phân kép. Đó là định lý Greene. Vâng, hóa ra là chúng ta có thể làm điều tương tự trong không gian và đó được gọi là định lí Stokes. Nội dung của định lí Stokes là gì? Nó nói rằng công được thực hiện bởi một trường vectơ dọc theo đường cong kín bằng tích phân kép của curl F. Hãy để tôi viết nó bằng cách sử dụng ký hiệu del. Đó là curl F. Dot ndS trên một bề mặt được lựa chọn phù hợp. Đó là một loại định lí rất lạ.

But actually it is not much more strange than things we have seen before. I should clarify what this means. C has to be a closed curve in space. And S can be any surface bounded by C. For example, what Stokes' theorem tells me is that let us say that I have to compute some line integral on maybe, say, the unit circle in the x, y plane. Of course I can set a line integral directly and compute it by setting x equals cosine T, y equals sine T, z equals zero.
Nhưng về cơ bản nó thực sự không lạ hơn nhiều so với những thứ chúng ta đã thấy từ trước. Tôi nên làm rõ ý nghĩa của nó. C phải là một đường cong khép kín trong không gian. Và S có thể là bất kì bề mặt nào được bao bởi C. Ví dụ, những gì Định lý Stokes cho chúng ta biết là giả sử rằng tích phân đường nào đó trên, giả sử, đường tròn đơn vị trong mặt phẳng x, y. Tất nhiên tôi có thể tính tích phân đường một cách trực tiếp bằng cách đặt x bằng cô sin T, y bằng sin T, z bằng không.

But maybe sometimes I don't want to do that because my vector field is really complicated. And instead I will want to reduce things to a surface integral. Now, I know that you guys are not necessarily fond of computing flux of vector fields for surfaces so maybe you don't really see the point. But sometimes it is useful. Sometimes it is also useful backwards because, actually, you have a surface integral that you would like to turn into a line integral.
Nhưng có thể đôi khi tôi không muốn làm việc đó bởi vì trường vector của tôi thật sự phức tạp. Và thay vì vậy tôi muốn đưa các thứ về tích phân mặt. Bây giờ, tôi biết rằng các bạn không thích tính thông lượng của trường vector cho các bề mặt vì vậy có lẽ bạn không thực sự hiểu quan điểm. Nhưng đôi khi nó hữu ích. Đôi khi nó cũng hữu ích ngược trở lại bởi vì,nhiều khi bạn có một tích phân mặt mà bạn muốn chuyển nó thành tích phân đường.

What Stokes' theorem says is that I can choose my favorite surface whose boundary is this circle. I could choose, for example, a half sphere if I want or I can choose, let's call that s1, I don't know, a pointy thing, s2. Probably the most logical one, actually, would be just to choose a disk in the x, y plane. That would probably be the easiest one to set up for calculating flux. Anyway, what Stokes' theorem tells me is I

can choose any of these surfaces, whichever one I want, and I can compute the flux of curl F through this surface. Curl F is a new vector field when you have this formula that gives you a vector field you compute its flux through your favorite surface, and you should get the same thing as if you had done the line integral for F.
Định lý Stokes nói rằng tôi có thể chọn bề mặt yêu thích của tôi mà biên của nó là đường tròn này. Tôi có thể chọn, ví dụ, một nửa quả cầu nếu tôi muốn hay tôi có thể chọn, hãy gọi đó là s1, tôi không biết, một bề mặt nhọn, s2. Có lẽ là cái hợp lý nhất, thực sự, sẽ là chọn hình tròn trong mặt phẳng x, y. Như vậy sẽ tính thông lượng dễ dàng nhất. Dù sao đi nữa, những gì Định lý Stokes cho chúng ta biết là tôi có thể chọn bất kì cái nào trong những bề mặt này, bất cứ cái nào tôi muốn, và tôi có thể tính thông lượngcủa curl F qua bề mặt này. Curl F là một trường vector mới khi bạn có công thức này cho bạn một trường vector mà bạn tính thông lượng của nó qua bề mặt yêu thích của bạn, và bạn sẽ nhận được điều tương tự như thể bạn đã tính tích phân đường cho F.

That is the statement. Now, there is a catch here. What is the catch? Well, the catch is we have to figure out what conventions to use because remember when we have a surface there are two possible orientations. We have to decide which way we will counter flux positively, which way we will counter flux negatively. And, if we change our choice, then of course the flux will become the opposite. Well, similarly to define the work, I need to choose which way I am going to run my curve. If I change which way I go around the curve then my work will become the opposite. What happens is I have to orient the curve C and the surface S in compatible ways. We have to figure out what the rule is for how the orientation of S and that of C relate to each other.
Đó là nội dung. Bây giờ, có một cái bẫy ở đây. Là gì? Vâng, bẫy là chúng ta phải chỉ ra quy ước mà chúng ta sử dụng là gì bởi vì nhớ rằng chúng ta có một bề mặt có thể có hai sự định hướng khả dĩ. Chúng ta phải quyết định chúng ta sẽ tính thông lượng dương theo đường nào, âm theo đường nào. Và, nếu chúng ta thay đổi lựa chọn của chúng ta, thì tất nhiên dấu của thông lượng sẽ trở thành ngược lại. Vâng, giống như khi định nghĩa công, tôi cần phải chọn tôi sẽ đi theo đường cong theo đường nào. Nếu tôi thay đổi đường đi dọc theo đường cong thì công sẽ có dấu ngược lại. Còn ở đây tôi phải định hướng đường cong C và bề mặt S theo những cách tương thích. Tức là, chúng ta phải chỉ ra quy luật định hướng của S và của C liên hệ với nhau như thế nào.

What about orientation? Well, we need the orientations of C and S to be compatible and they have to explain to you what the rule is. Let me show you a picture. The rule is if I walk along C with S to my left then the normal vector is pointing up for me. Let

me write that. If I walk along C, I should say in the positive direction, in the direction that I have chosen to orient C. With S to my left then n is pointing up for me. Here is the example. If I am walking on this curve, it looks like the surface is to my left. And so the normal vector is going towards what is up for me. Any questions about that? I see some people using their right hands. That is also right-handable which I am going to say in just a few moments.
Thế còn sự định hướng thì sao? Vâng, chúng ta cần sự định hướng của C và S là tương thích và chỉ rõ quy tắc. Hãy để tôi chỉ cho bạn một hình vẽ. Quy tắc là nếu tôi đi bộ dọc theo C với S ở bên trái tôi thì vector pháp tuyến hướng lên đối với tôi. Hãy để tôi viết ra điều đó. Nếu tôi đi dọc theo C, theo hướng dương, tức là hướng mà tôi đã chọn để định hướng C. Với S ở bên trái thì n hướng lên đối với tôi. Đây là ví dụ. Nếu tôi đi dọc theo đường cong này, có vẻ như bề mặt ở bên trái của tôi. Và do đó vector pháp tuyến sẽ hướng lên đối với tôi. Câu hỏi? Tôi thấy một số người sử dụng tay phải. Cũng có quy tắc dành cho bên phải và tôi sẽ nói trong chốc lát.

That is another way to remember this. Before I tell you about the right-handable version, let me just try something. Actually, I am not happy with this orientation of C and I want to orient my curve C going clockwise on the picture. So the other orientation. Then, if I walk on it this way, the surface would be to my right. You can remember, if it helps you, that if a surface is to your right then the normal vector will go down.
Đó là một cách khác để nhớ cái này. Trước khi tôi nói cho bạn biết về phiên bản tay phải, hãy để tôi thử một cái gì đó. Thực sự, tôi không hài lòng với định hướng này của C và tôi muốn định hướng đường cong C của tôi đi cùng chiều kim đồng hồ trên hình. Định hướng khác cũng vậy. Thế thì, nếu tôi đi bộ trên nó theo đường này, bề mặt sẽ nằm bên phải. Bạn có thể nhớ, nếu nó giúp bạn, rằng nếu bề mặt ở bên phải thì vector pháp tuyến sẽ hướng xuống.

The other way to think about this rule is enough because if you are walking clockwise, well, you can change that to counterclockwise just by walking upside down. This guy is walking clockwise on C. And while for him, if you look carefully at the picture, the surface is actually to his left when you flip upside down. Yeah, it is kind of confusing. But, anyway, maybe it's easier if you actually rotate in the picture. And now it is getting actually really confusing because his walking upside up with, actually, the surface is to his left. I mean where he is at here is actually at the front and this is the back, but that is kind of hard to see.
Cách còn lại để xét quy tắc này là đủ bởi vì nếu bạn đi bộ cùng chiều kim đồng hồ, vâng, bạn có thể thay đổi nó ngược chiều kim đồng hồ chỉ bằng cách đi lộn ngược. Thằng này là đi cùng chiều kim đồng hồ trên C. Và trong khi đối với anh ấy, nếu bạn nhìn kĩ trên hình, bề mặt thực sự là ở bên trái của anh ấy khi bạn lật ngược. Yeah, nó hơi khó hiểu. Nhưng, dù sao đi nữa, có lẽ nó sẽ dễ hơn nếu bạn xoay trong hình. Và bây giờ nó trở nên thực sự khó hiểu bởi vì sự đi lộn ngược của anh ấy với, trên thực tế, bề mặt ở bên trái của anh ấy. Ý tôi là nơi anh ấy đứng tại đây là phía trước và đây là phía sau, nhưng điều đó hơi khó thấy.

Anyway, whichever method will work best for you. Perhaps it is easiest to first do it with the other orientation, this one, and this side, if you want the opposite one, then you will just flip everything. Now, what is the other way of remembering this with the right-hand rule? First of all, take your right hand, not your left. Even if your right hand is actually using a pen or something like that in your right hand do this.
Dù sao đi nữa, phương pháp nào sẽ làm việc tốt nhất cho bạn. Có lẽ đầu tiên thực hiện nó với cách định hướng kia là đơn giản nhất, cái này, và phía bên này, nếu bạn muốn cái đối diện, thì bạn sẽ lật mọi thứ. Bây giờ, cách khác để nhớ điều này với quy tắc bàn tay phải là gì? Trước hết, lấy tay phải của bạn, không phải tay trái. Ngay cả khi tay phải của bạn đang dùng viết chì hay thứ gì đó tương tự thế hãy làm điều này.

And let's take your fingers in order. First your thumb. Let's make your thumb go along the object that has only one dimension in there. That is the curve. Well, let's look at the top picture up there. I want my thumb to go along the curve so that is

kind of towards the right. Then I want to make my index finger point towards the surface. Towards the surface I mean towards the interior of the surface from the curve. And when I am on the curve I am on the boundary of the surface, so there is a direction along the surface that is the curve and the other one is pointing into the surface. That one would be pointing kind of to the back slightly up maybe, so like that. And now your middle finger is going to point in the direction of the normal vector.
Và hãy dùng các ngón tay của bạn theo thứ tự. Đầu tiên là ngón cái. Hãy làm cho ngón cái của bạn đi dọc theo đối tượng chỉ có một chiều. Đó chính là các đường cong. Vâng, chúng ta hãy xét hình đầu tiên trên đó. Tôi muốn ngón cái của bạn đi dọc theo đường cong vì vậy nó hướng về bên phải. Sau đó, tôi cần làm cho ngón tay trỏ của tôi hướng về bề mặt. Hướng về bề mặt có nghĩa là hướng về phía bên trong của bề mặt từ đường cong. Và khi tôi đang ở trên đường cong tôi ở biên của bề mặt, do đó có một hướng dọc theo bề mặt đó là đường cong và hướng kia hướng vào trong bề mặt. Hướng đó sẽ hướng về phía sau hơi lên, vâng giống như thế. Và bây giờ, ngón giữa của bạn chỉ hướng vector pháp tuyến.

That is up, at least if you have the same kind of right hand as I do. The other way of doing it is using the right-hand rule along C positively. The index finger towards the interior of S. Sorry, I shouldn't say interior. I should say tangent to S towards the interior of S. What I mean by that is really the part of S that is not its boundary, so the rest of the surface. Then the middle finger points parallel to n.
Nó hướng lên, yêu cầu là bạn sử dụng quy tắc bàn tay phải như tôi làm. Cách khác ở đây là làm nó bằng cách sử dụng quy tắc bàn tay phải dọc theo C dương. Ngón tay trỏ hướng về bên trong của S. Xin lỗi, tôi không nên nói bên trong. Tôi nên nói tiếp xúc của S hướng về bên trong S. Ý tôi là phần của S không ở trên biên của nó, phần còn lại của bề mặt cũng vậy. Thế thì ngón giữa chỉ hướng song song với n.

Let's practice. Let's say that I gave you this curve bounding this surface. Which way do you think the normal vector will be going? Up. Yes. Everyone is voting up. Imaging that I am walking around C. That is to my left. Normal vector points up. Imagine that you put your thumb along C, your index towards S and then your middle finger points up. Very good. N points up. Another one. It is interesting to watch you guys. I think mostly it is going up. The correct answer is it goes up and into the cone. How do we see that? Well, one way to think about it is imagine that you are walking on C, on the rim of this cone. You have two options. Imagine that you are walking kind of inside or imagine that you are walking kind of outside.

Hãy thực hành. Giả sử rằng tôi cho bạn đường cong bao quanh bề mặt này. Bạn nghĩ vector pháp tuyến sẽ đi theo hướng nào? Lên. Đúng. Mọi người đều biểu quyết. Hãy tưởng tượng tôi đang đi dọc theo C. Đó là bên trái của tôi. Vector pháp tuyến hướng lên. Hãy tưởng tượng rằng bạn đặt ngón cái dọc theo C, ngón trỏ của bạn hướng về S và sau đó ngón giữa của bạn hướng lên. Rất tốt. N hướng lên. Cái khác. Thật thú vị vì câu trả lời của các bạn. Đa số chọn hướng lên. Câu trả lời đúng là nó đi lên và vào trong nón. Làm sao chúng ta biết? Vâng, một cách để xét nó là tưởng tượng rằng bạn đi dọc theo C, trên viền của nón này. Bạn có hai lựa chọn. Hãy tưởng tượng rằng bạn đang đi bên trong hoặc tưởng tượng rằng bạn đang đi bên ngoài.

If you are walking outside then S is to your right, but it does not sound good. Let's say instead that you are walking on the inside of a cone following the boundary. Well, then the surface is to your left. And so the normal vector will be up for you which means it will be pointing slightly up and into the cone. Another way to think about it, through the right-hand rule, from this way index going kind of down because the surface goes down and a bit to the back.

Nếu bạn đang đi bên ngoài thì S ở bên phải của bạn, nhưng nó có vẻ không tốt. Thay vì vậy giả sử rằng bạn đi bên trong nón dọc theo biên. Vâng, thì bề mặt ở bên trái của bạn. Và như vậy vector pháp tuyến sẽ hướng lên đối với bạn nghĩa là nó hơi hướng lên và vào trong nón. Một cách khác để nghĩ về nó, bằng quy tắc bàn tay phải, theo cách này ngón trỏ sẽ hướng xuống bởi vì bề mặt hướng xuống và một chút ra sau.

And then the normal vector points up and in. Yet another way, if you deform continuously your surface then the conventions will not change. See, this is kind of topology in a way. You can deform things and nothing will change. So what if we somehow flatten our cone, push it a bit up so that it becomes completely flat? Then, if you had a flat disk with the curve going counterclockwise, the normal vector would go up.

Và thế thì vector pháp tuyến hướng lên và vào trong. Tuy nhiên vẫn còn một cách khác, nếu bạn liên tục làm biến dạng bề mặt của bạn thì các quy ước sẽ không thay đổi. Thấy không, đây là topo. Bạn có thể làm biến dạng các thứ và không có gì thay đổi. Vì vậy, giá như chúng ta làm phẳng hình nón của chúng ta, đẩy nó lên một chút để nó trở nên hoàn toàn bằng phẳng? Thì, nếu bạn đã có một đĩa phẳng với đường cong đi ngược chiều kim đồng hồ, vector pháp tuyến sẽ hướng lên.

Now take your disk with its normal vector sticking up. If you want to paint the face a different color so that you can remember that was beside with a normal vector and then push it back down to the cone, you will see that the painted face, the one with the normal vector on that side is the one that is inside and up. Does that make sense? Anyway, I think you have just to play with these examples for long enough and get it.

Bây giờ hãy chọn một đĩa với vector pháp tuyến đâm lên. Nếu bạn muốn tô một bề mặt màu khác để bạn có thể nhớ nó nằm bên cạnh với vector pháp tuyến và sau đó đẩy nó xuống nón lại, bạn sẽ thấy rằng bề mặt được tô, cái với vector pháp tuyến ở phía đó là cái ở bên trong và bên trên. Các bạn hiểu ý tưởng đó không? Dù sao đi nữa, tôi nghĩ rằng bạn phải làm nhiều ví dụ để có thể hiểu được nó.

OK. The last one. Let's say that I have a cylinder. So now this guy has actually two boundary curves, C and C prime. And let's say I want to orient my cylinder so that the normal vector sticks out. How should I choose the orientation of my curves? Let's start with, say, the bottom one. Would the bottom one be going clockwise or counterclockwise. Most people seem to say counterclockwise, and I agree with that. Let me write that down and claim C prime should go counterclockwise. One way to think about it, actually, it's quite easy, you mentioned that you're walking on the outside of the cylinder along C prime.

OK. Ví dụ cuối cùng. Giả sử rằng tôi có một hình trụ. Vì vậy, bây giờ thằng này thực sự có hai đường cong biên, C và C phẩy. Và giả sử rằng tôi muốn định hướng hình trụ của tôi để vector pháp tuyến đâm ra ngoài. Tôi sẽ chọn cách định hướng đường cong của tôi như thế nào? Giả sử rằng chúng ta hãy bắt đầu với, vâng, cái ở dưới. Cái ở dưới sẽ đi cùng chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ. Dường như đa số mọi người nói ngược chiều kim đồng hồ, và tôi đồng ý với điều đó. Hãy để tôi viết điều đó ra và khẳng định C phẩy sẽ đi ngược chiều kim đồng hồ. Một cách để nghĩ về nó, thực sự, nó khá dễ, bạn đi ở phía ngoài của hình trụ dọc theo C phẩy.

If you want to walk along C prime so that the cylinder is to your left, that means you have to actually go counterclockwise around it. The other way is use your right hand. Say when you're at the front of C prime, your thumb points to the right, your index points up because that's where the surface is, and then your middle finger will point out. What about C? Well, C I claim we should be doing clockwise. I mean think about just walking again on the surface of the cylinder along C. If you walk clockwise, you will see that the surface is to your left or use the right-hand rule. Now, if a problem gives you neither the orientation of a curve nor that of the surface then it's up to you to make them up.
Nếu bạn muốn đi dọc theo C phẩy thì hình trụ ở bên trái bạn, điều đó có nghĩa là bạn phải thực sự đi ngược chiều kim đồng hồ quanh nó. Cách khác là sử dụng tay phải của bạn. Giả sử khi bạn ở trước C phẩy, ngón cái của bạn hướng sang phải, ngón trỏ của bạn hướng lên bởi vì đó là vị trí của bề mặt, và sau đó ngón giữa của bạn sẽ hướng ra ngoài. Thế còn C thì sao? Vâng, C tôi cho rằng chúng ta sẽ làm cùng chiều kim đồng hồ. Ý tôi là hãy nghĩ về việc một lần nữa lại đi trên bề mặt của hình trụ dọc theo C. Nếu bạn đi cùng chiều kim đồng hồ, bạn sẽ thấy rằng bề mặt trái ở bên trái của bạn hoặc sử dụng quy tắc bàn tay phải. Bây giờ, nếu bài toán không cho bạn sự định hướng của đường cong cũng không cho sự định hướng của bề mặt thì tùy bạn chọn cách định hướng.

But you have to make them up in a consistent way. You cannot choose them both at random. All right. Now we're all set to try to use Stokes' theorem. Well, let me do an example first. The first example that I will do is actually a comparison. Stokes' versus Green. I want to show you how Green's theorem for work that we saw in the plane, but also involved work and curl and so on, is actually a special case of this. Let's say that we will look at the special case where our curve C is actually a curve in the x, y plane.
Nhưng bạn phải thiết lập chúng theo cách nhất quán. Bạn không thể làm một cách ngẫu nhiên. Được rồi. Bây giờ tất cả chúng ta sẽ thử dùng định lý Stokes. Vâng, hãy để tôi làm một ví dụ trước. Ví dụ đầu tiên mà tôi sẽ làm là so sánh. Stokes với Green. Tôi muốn chỉ cho bạn thấy Định lý Green dùng để tính công mà chúng ta đã thấy trong mặt phẳng, mà còn liên quan đến công và curl và v.v…., thật sự là một trường hợp đặc biệt của cái này. Giả sử rằng chúng ta xét trường hợp đặc biệt ở đó đường cong C của chúng ta thực sự là đường cong trong mặt phẳng x, y.
And let's make it go counterclockwise in the x, y plane because that's what we did for Green's theorem. Now let's choose a surface bounded by this curve. Well, as I

said, I could make up any surface that comes to my mind. But, if I want to relate to this stuff, I should probably stay in the x, y plane. So I am just going to take my surface to be the piece of the x, y plane that is inside my curve. So let's say S is going to be a portion of x, y plane bounded by a curve C, and the curve C goes counterclockwise.
Và chúng ta hãy làm cho nó đi ngược chiều kim đồng hồ trong mặt phẳng x, y bởi vì đó là những gì chúng ta đã làm cho định lý Green. Bây giờ hãy chọn một bề mặt được bao bởi đường cong này. Vâng, như tôi đã nói, tôi có thể xét bất kì đường cong nào xuất hiện trong đầu tôi. Nhưng, nếu tôi muốn thiết lập mối quan hệ giữa những thứ này, có lẽ tôi nên ở trong mặt phẳng x, y. Vì vậy, tôi sẽ chọn bề mặt của tôi là một phần của mặt phẳng x, y bên trong đường cong của tôi. Vì vậy, giả sử S sẽ là một phần của mặt phẳng x, y được bao bởi đường cong C, và đường cong C đi ngược chiều kim đồng hồ.

Well, then I should look at [the table?]. For work along C of my favorite vector field F dot dr. So that will be the line integral of Pdx plus Qdy. Like I said, if I call the components of my field P, Q and R, it will be Pdx plus Qdy plus Rdz, but I don't have any Z here. Dz is zero on C. If I evaluate for line integral, I don't have any term involving dz. Z is zero. Now, let's see what Strokes says. Stokes says instead I can compute for flux through S of curve F.
Vâng, thế thì tôi sẽ xét …. Đối với công dọc theo C của trường vector yêu thích của tôi F dot dr. Vì vậy, đó sẽ là tích phân đường của Pdx cộng Qdy. Giống như tôi đã nói, nếu tôi gọi các thành phần của trường của tôi là P, Q, R, thì công sẽ là Pdx cộng Qdy cộng với Rdz, nhưng tôi không có bất kỳ z nào ở đây. dz bằng không trên C. Nếu tôi tính tích phân đường, tôi không có bất kỳ số hạng nào liên quan đến dz. z bằng không. Bây giờ, hãy xem định lí Stokes nói gì. Stokes nói rằng thay vì vậy tôi có thể tính thông lượng qua S của curl F.

But now what's the normal vector to my surface? Well, it's going to be either k or negative k. I just have to figure out which one it is. Well, if you followed what we've done there, you know that the normal vector compatible with this choice for the curve C is the one that points up. My normal vector is just going to be k hat, so I am going to replace my normal vector by k hat. That means, actually, I will be integrating curl dot k. That means I am integrating the z component of curl. Let's look at curl F dot k.
Nhưng bây giờ vector pháp tuyến của bề mặt của tôi là gì? Vâng, nó sẽ hoặc là k hoặc trừ k. Tôi phải chỉ ra nó là cái nào. Vâng, nếu bạn theo những gì chúng ta đã làm ở đó, bạn biết rằng vector pháp tuyến tương ứng với sự lựa chọn này cho đường cong C là cái hướng lên. Vector pháp tuyến của tôi sẽ là k mũ, vì vậy tôi sẽ thay thế vector pháp tuyến bằng k mũ. Điều đó có nghĩa là, thực sự, tôi sẽ lấy tích phân curl dot k. Điều đó có nghĩa là tôi sẽ lấy tích phân thành phần z của curl. Hãy xét curl F dot k.

That's the z component of curl F. And what's the z component of curl? Well, I conveniently still have the values up there. It's Q sub x minus P sub y. My double integral becomes double integral of Q sub x minus P sub y. What about dS? Well, I am in a piece of the x, y plane, so dS is just dxdy or your favorite combination that does the same thing. Now, see, if you look at this equality, integral of Pdx plus Qdy along a closed curve equals double integral of Qx minus Py dxdy.
Đó là thành phần z của curl F. Và thành phần z của curl là gì? Vâng, tôi vẫn còn có các giá trị trên đó. Đó là Q x trừ P y. Tích phân kép của tôi trở thành tích phân kép của Q x trừ P y. Thế còn dS thì sao? Vâng, tôi đang ở một mảnh của mặt phẳng x, y, do đó dS chỉ là dxdy hoặc sự kết hợp yêu thích của bạn làm điều tương tự. Bây giờ, thấy không, nếu bạn nhìn vào đẳng thức này, tích phân của Pdx cộng Qdy dọc theo một đường cong khép kín bằng tích phân kép của Qx trừ Py dxdy.

That is exactly the statement of Green's theorem. I mean except at that time we called things m and n, but really that shouldn't matter. This tells you that, in fact, Green's theorem is just a special case of Stokes' in the x, y plane. Now, another small remark I want to make right away before I forget, you might think that these

rules that we've made up about compatibility of orientations are completely arbitrary.
Đó chính là nội dung của định lý của Green. Ý tôi là ngoại trừ vào lúc này chúng ta gọi các thứ là m và n, nhưng thực sự điều đó không quan trọng. Điều này cho bạn biết rằng, trên thực tế, định lý Green chỉ là một trường hợp đặc biệt của định lí Stokes trong mặt phẳng x, y. Bây giờ, một nhận xét khác tôi muốn làm ngay trước khi tôi quên, bạn có thể nghĩ rằng những quy tắc mà chúng ta đã tạo ra về tính tương thích của sự định hướng là hoàn toàn tùy ý.

Well, they are literally in the same way as our convention for which we guy curl is arbitrary. We chose to make the curl be this thing and not the opposite which would have been pretty much just as sensible. And, ultimately, that comes from our choice of making the cross-product be what it is but of the opposite. Ultimately, it all comes from our preference for right-handed coordinate systems.
Vâng, theo nghĩa đen chúng theo cách tương tự như quy ước của chúng ta mà curl là tùy ý đối với nó. Chúng ta chọn để làm cho curl là cái này chứ không phải ngược lại chủ yếu do kinh nghiệm. Và, cuối cùng, điều đó là do lựa chọn của chúng ta để làm cho tích vector là như vậy chứ không phải ngược lại. Cuối cùng, tất cả đều do quy ước của chúng ta về các hệ tọa độ tuân theo quy tắc bàn tay phải.

If we had been on the planet with left-handed coordinate systems then actually our conventions would be all the other way around, but they are this way. Any other questions? A surface that you use in Stokes' theorem is usually not going to be closed because its boundary needs to be the curve C. So if you had a closed surface you wouldn't know where to put your curve. I mean of course you could make a tiny hole in it and get a tiny curve. Actually, what that would say, and we are going to see more about that so not very important right now, but what we would see is that for a close surface we would end up getting zero for the flux.
Nếu chúng ta ở một hành tinh với các hệ tọa độ tuân theo quy tắc bàn tay trái thì thực sự quy ước của chúng ta sẽ hoàn toàn khác, nhưng chúng theo cách này. Câu hỏi khác? Một bề mặt mà bạn sử dụng định lý Stokes thường không khép kín vì biên của nó cần là đường cong C. Vì vậy, nếu bạn có một bề mặt khép kín bạn sẽ không biết đặt đường cong của bạn ở đâu. Ý tôi là tất nhiên bạn có thể tạo ra một lổ nhỏ trong nó và nhận được một đường cong nhỏ. Thực sự, điều này có nghĩa là, và chúng ta sẽ thấy thêm về điều đó vì vậy không quan trọng ngay bây giờ, nhưng những gì chúng ta sẽ thấy là đối với bề mặt kín thông lượng sẽ bằng không.

And that is actually because divergence of curl is zero, but I am getting ahead of myself. We are going to see that probably tomorrow in more detail. Stokes' theorem only works if you can make sense of this. That means you need your vector field to

be continuous and differentiable everywhere on the surface S. Now, why is that relevant? Well, say that your vector field was not defined at the origin and say that you wanted to do, you know, the example that I had first with the unit circling the x, y plane. Normally, the most sensible choice of surface to apply Stokes' theorem to would be just the flat disk in the x, y plane. But that assumes that your vector field is well-defined there. If your vector field is not defined at the origin but defined everywhere else you cannot use this guy, but maybe you can still use, say, the half-sphere, for example.
Và nguyên nhân là do divergence của curl bằng không, nhưng tôi đang nói trước. Chúng ta sẽ thấy điều đó chi tiết hơn vào ngày mai. Định lý Stokes chỉ áp dụng được nếu bạn làm cho cái này có nghĩa. Điều đó có nghĩa là bạn cần trường vector của bạn liên tục và khả vi ở khắp mọi nơi trên bề mặt S. Bây giờ, tại sao điều đó có liên quan? Vâng, giả sử rằng trường vector của bạn không xác định tại gốc tọa độ và bạn muốn làm, bạn đã biết, ví dụ mà tôi đã có lần đầu với sự quay với vận tốc góc bằng một trong mặt phẳng x,y. Thông thường, sự lựa chọn hợp lý nhất của bề mặt để áp dụng định lý Stokes sẽ chỉ là hình tròn trong mặt phẳng x, y. Nhưng giả sử rằng trường vector của bạn được xác định ở đó. Nếu trường vectơ của bạn không được xác định tại gốc tọa độ mà xác định mọi nơi khác bạn không thể dùng thẳng này, nhưng có lẽ bạn vẫn có thể sử dụng, chẳng hạn, nửa hình cầu.

Or, you could use a piece of cylinder plus a flat top or whatever you want but not pressing for the origin. So you could still use Stokes but you'd have to be careful about which surface you choose. Now, if instead your vector field is not defined anywhere on the z-axis then you're out of luck because there is no way to find a surface bounded by this unit circle without crossing the z-axis somewhere. Then you wouldn't be able to Stokes' theorem at all or at least not directly.
Hoặc, bạn có thể sử dụng một phần của hình trụ cộng mặt trên phẳng hay bất cứ gì bạn muốn nhưng không bao gồm gốc tọa độ. Vì vậy, bạn vẫn có thể sử dụng Stokes nhưng bạn phải cẩn thận về những bề mặt mà bạn chọn. Bây giờ, nếu thay vì vậy trường vector của bạn không xác định ở bất cứ nơi đâu trên trục z thì bạn không may mắn không có cách nào tìm bề mặt được bao bởi đường tròn đơn vị này mà không đi qua trục z. Thế thì, bạn không thể dùng định lí Stokes hoặc nói chính xác là không thể dùng trực tiếp.

Maybe I should write it F defines a differentiable everywhere on this. But we don't care about what happens outside of this. It's really only on the surface that we need it to be OK. I mean, again, 99% of the vector fields that we see in this class are defined everywhere so that's not an urgent concern, but still. OK. Should we move on? Yes. I have a yes. Let me explain to you quickly why Stokes is true.
Có lẽ tôi nên viết là F xác định một vi phân ở khắp mọi nơi trên cái này. Nhưng chúng ta không quan tâm về những gì xảy ra bên ngoài cái này. Nó thực sự chỉ nằm trên bề mặt mà chúng ta cần nó là OK. Ý tôi là, một lần nữa, 99% các trường vector mà chúng ta gặp trong môn này xác định ở khắp mọi nơi vì vậy đó không phải là một mối quan tâm cấp bách, nhưng vẫn còn. OK. Chúng ta có nên chuyển chủ đề không? Vâng. Tôi có yes. Hãy để tôi giải thích lý do tại sao định lí Stokes đúng.

How do we prove a theorem like that? Well, the strategy, I mean there are other ways, but the least painful strategy at this point is to observe what we already know is a special case of Stokes's theorem. Namely we know the case where the curve is actually in the x, y plane and the surface is a flat piece of the x, y plane because that's Green's theorem which we proved a while ago. We know it for C and S in the x, y plane. Now, what if C and S were, say, in the y, z plane instead of the x, y plane? Well, then it will not quite give the same picture because the normal vector would be i hat instead of k hat and they would be having different notations and it would be integrating with y and z.
Làm thế nào để chúng ta chứng minh một định lý như thế? Vâng, chiến lược, ý tôi là có những cách khác, nhưng chiến lược ít đau đớn nhất vào thời điểm này là quan sát trường hợp đặc biệt của định lý Stokes. Cụ thể chúng ta biết trường hợp ở đó đường cong thực sự nằm trong mặt phẳng x, y và bề mặt là một mảnh phẳng của mặt phẳng x, y bởi vì đó là định lí Green mà chúng ta đã chứng minh lúc trước. Chúng ta biết nó

cho C và S trong mặt phẳng x, y. Bây giờ, giá như C và S , giả sử, nằm trong mặt phẳng y, z chứ không phải mặt phẳng x, y? Vâng, thế thì nó sẽ không hoàn toàn cho cùng một hình ảnh bởi vì vector pháp tuyến sẽ là i mũ chứ không phải k mũ và chúng sẽ có những quy ước khác và nó sẽ là tích phân với y và z.

But you see that it would become, again, exactly the same formula. We'd know it for any of the coordinate planes. In fact, I claim we know it for absolutely any plane. And the reason for that is, sure, when we write it in coordinates, when we write that this line integral is integral of Pdx plus Qdy plus Rdz or when we write that the curl is given by this formula we use the x, y, z coordinate system. But there is something I haven't quite told you about.
Nhưng bạn thấy rằng nó sẽ trở thành, một lần nữa, cùng công thức như vậy. Chúng ta biết điều đó cho bất kỳ mặt phẳng tọa độ nào. Trong thực tế, tôi khẳng định chúng ta biết nó cho bất kì mặt phẳng nào. Và lý do của việc đó là, chắc chắn, khi chúng ta viết nó theo các tọa độ, khi chúng ta viết tích phân đường bằng tích phân của Pdx cộng Qdy cộng với Rdz hoặc khi chúng ta viết curl được cho bởi công thức này chúng ta sử dụng hệ tọa độ x, y, z. Nhưng có vài điều mà tôi hoàn toàn chưa nói.

Which is if I switch to any other right-handed coordinate system, so I do some sort of rotation of my space coordinates, then somehow the line integral, the flux integral, the notion of curl makes sense in coordinates. And the reason is that they all have geometric interpretations. For example, when I think of this as the work done by a force, well, the force doesn't care whether it's being put in x, y coordinates this way or that way. It still does the same work because it's the same force.
Đó là nếu tôi chuyển sang bất kỳ hệ tọa độ bàn tay phải nào khác, vâng tôi thực hiện một phép quay tọa độ không gian nào đó, thế thì tích phân đường, tích phân thông lượng, khái niệm về curl có nghĩa theo các tọa độ. Và lý do là tất cả chúng có những diễn giải hình học. Ví dụ, khi tôi nghĩ xét cái này như công được thực hiện bởi lực, vâng, lực không quan tâm đến nó sẽ đặt các tọa độ x, y theo cách này hay theo cách đó. Nó vẫn còn thực hiện cùng một công việc vì nó là cùng một lực.

And when I say that the curl measures the rotation in a motion, well, that depends on which coordinates you use. And the same for interpretation of flux. In fact, if I rotated my coordinates to fit with any other plane, I could still do the same things. What I'm trying to say is, in fact, if C and S are in any plane then we can still claim that it reduces to Green's theorem. It will be Green's theorem not in x, y, z coordinates but in some funny rotated coordinate systems. What I'm saying is that work, flux and curl makes sense independently of coordinates.

Và khi tôi nói rằng curl đo sự quay trong chuyển động, vâng, điều đó phụ thuộc vào tọa độ mà bạn sử dụng. Và tương tự cho thông lượng. Thực sự, nếu tôi quay các tọa độ của tôi để phù hợp với bất kỳ mặt phẳng nào, tôi vẫn có thể làm những điều tương tự. Những gì tôi đang cố gắng để nói là, trên thực tế, nếu C và S nằm trong bất kỳ mặt phẳng nào thì chúng ta vẫn còn khẳng định rằng nó rút về định lí Green. Nó sẽ là định lí Green không phải trong các tọa độ x, y, z mà trong một số hệ tọa độ được quay nào đó. Tức là công, thông lượng và curl không phụ thuộc vào các tọa độ.

Now, this has to stop somewhere. I can start claiming that I can somehow bend my coordinates to a plane, any surface is flat. That doesn't really work. But what I can say is if I have any surface I can cut it into tiny pieces. And these tiny pieces are basically flat. So that's basically the idea of a proof. I am going to decompose my surface into very small flat pieces. Given any S we are just going to decompose it into tiny almost flat pieces.

Bây giờ, cái này phải dừng ở nơi nào đó. Tôi có thể bắt đầu khẳng định rằng tôi có thể bẻ cong các tọa độ của tôi thành một mặt phẳng, bất kỳ bề mặt nào phẳng. Điều đó không thực sự đúng. Nhưng những gì tôi có thể nói là nếu tôi có bất cứ bề mặt nào tôi có thể cắt nó thành từng mảnh nhỏ. Và những mảnh nhỏ về cơ bản là phẳng. Vì vậy, về cơ bản đó là ý tưởng của chứng minh. Tôi sẽ phân tích bề mặt của tôi thành những mảnh phẳng rất nhỏ. Với bất kỳ S nào chúng ta chỉ cần phân tích nó thành những mảnh nhỏ gần như phẳng.

For example, if I have my surface like this, what I will do is I will just cut it into tiles. I mean a good example of that is if you look at those geodesic things, for example, it's made of all these hexagons and pentagons. Well, actually, they're not quite flat in the usual rule, but you could make them flat and it would still look pretty much like a sphere. Anyway, you're going to cut your surface into lots of tiny pieces. And then you can use Stokes' theorem on each small piece. What it says on each small flat piece –

Ví dụ, nếu tôi có một mặt như thế này, tôi sẽ cắt nó thành các viên.Tôi muốn nói là một ví dụ tốt về cái đó là nếu bạn xét những thứ đo đạc này, ví dụ, nó được làm bằng tất cả những hình lục giác và ngũ giác này. Vâng, thực sự, chúng không hoàn toàn phẳng theo quy luật thông thường, nhưng bạn có thể làm cho chúng phẳng và nó vẫn còn khá giống một hình cầu. Dù sao đi nữa, bạn sẽ cắt bề mặt của bạn thành nhiều miếng nhỏ. Và sau đó bạn có thể sử dụng định lý Stokes 'trên từng mảnh nhỏ. Nó nói gì trên mỗi mảnh nhỏ phẳng -

It says that the line integral along say, for example, this curve is equal to the flux of a curl through this tiny piece of surface. And now I will add all of these terms together. If I add all of the small contributions to flux I get the total flux. What if I add all of the small line integrals? Well, I get lots of extra junk because I never asked to compute the line integral along this. But this guy will come in twice when I do this little plate and when I do that little plate with opposite orientations.

Nó nói rằng tích phân đường dọc theo, ví dụ, đường cong này bằng thông lượng của curl qua mảnh nhỏ này của bề mặt. Và bây giờ tôi cộng tất cả các số hạng này với nhau. Nếu tôi cộng tất cả những đóng góp nhỏ vào thông lượng tôi sẽ được thông lượng toàn phần. Nếu tôi cộng tất cả các tích phân đường nhỏ thì sao? Vâng, tôi nhận được rất nhiều thứ thừa vì tôi không yêu cầu tính tích phân đường dọc theo cái này. Nhưng thằng này sẽ xuất hiện hai lần khi tôi tính trên tấm nhỏ này và khi tôi tính trên tấm nhỏ đó với sự định hướng ngược lại.

When I sum all of the little line integrals together, all of the inner things cancel out, and the only ones that I go through only once are those that are at the outer most edges. So, when I sum all of my works together, I will get the work done just along the outer boundary C. Sum of work around each little piece is just actually the work along C, the outer curve. And the sum of the flux for each piece is going to be the

flux through S.
Khi tôi cộng tất cả các tích phân đường nhỏ với nhau, tất cả những thứ bên trong triệt tiêu, và chỉ những cái mà tôi đi qua một lần duy nhất là những cái ở tại cạnh ngoài cùng. Vì vậy, khi tôi cộng tất cả các công với nhau, tôi sẽ được công được thực hiện dọc theo biên bên ngoài C. Tổng của công quanh mỗi mảnh nhỏ thực sự là công dọc theo C, đường cong bên ngoài. Và tổng thông lượng cho mỗi mảnh sẽ là thông lượng qua S.

From Stokes' theorem for flat surfaces, I can get it for any surface. I am cheating a little bit because you would actually have to check carefully that this approximation where you flatten the little pieces that are almost flat is varied. But, trust me, it actually works. Let's do an actual example. I mean I said example, but that was more like getting us ready for the proof so probably that doesn't count as an actual example. I should probably keep these statements for now so I am not going to erase this side.
Từ định lý Stokes cho các bề mặt phẳng, tôi có thể làm nó cho bất kỳ bề mặt nào. Tôi gian lận một chút vì bạn thực sự sẽ phải kiểm tra cẩn thận rằng phép gần đúng này trong đó bạn làm phẳng những mảnh nhỏ gần như độ phẳng thay đổi. Nhưng, hãy tin tôi, nó thực sự đúng. Hãy làm một ví dụ thực tế. Ý tôi là tôi đã nói ví dụ, nhưng điều đó thực sự đang mang chúng ta đến phần chứng minh vì vậy có lẽ cái đó không tính như một ví dụ thực. Tôi sẽ giữ những phát biểu này cho hiện tại vì vậy tôi sẽ không xóa bên này.

Let's do an example. Let's try to find the work of vector field zi plus xj plus yk around the unit circle in the x, y plane counterclockwise. The picture is conveniently already there. Just as a quick review, let's see how we do that directly. If we do that directly, I have to find the integral along C. So F dot dr becomes zdx plus xdy plus ydz. But now we actually know that on this circle, well, z is zero.
Hãy làm một ví dụ. Hãy thử tìm công của trường vector zi cộng xj cộng yk quanh đường tròn đơn vị trong mặt phẳng x, y ngược chiều kim đồng hồ. Hình vẽ ở đó. Để tóm tắt, chúng ta hãy xem chúng ta làm điều đó trực tiếp như thế nào. Nếu chúng ta làm điều đó trực tiếp, tôi phải tìm tích phân dọc theo C. Vì vậy F dot dr trở thành zdx cộng xdy cộng ydz. Nhưng bây giờ chúng ta thực sự biết rằng trên đường tròn này, vâng, zbằng không.

And we can parameterize x and y, the unit circle in the x, y plane, so we can take x equals cosine t, y equals sine t. That will just become the integral over C. Well, z times dx, z is zero so we have nothing, plus x is cosine t times dy is -- Well, if y is sine t then dy is cosine tdt plus ydz but z is zero. Now, the range of values for t, well, we are going counterclockwise around the entire circle so that should go from zero to 2pi.
Và chúng ta có thể tham số hóa x và y, đường tròn đơn vị trong mặt phẳng x, y, vì vậy chúng ta có thể chọn x bằng cô sin t, y bằng sin t. Cái đó sẽ trở thành tích phân trên C. Vâng, z nhân dx, z bằng không vì vậy chúng ta không có gì, cộng x bằng cosin t nhân dy bằng - Vâng, nếu y bằng sin t thì dy bằng cô sin tdt cộng ydz nhưng z bằng không. Bây giờ, khoảng giá trị của t, vâng, chúng ta sẽ đi ngược chiều kim đồng hồ quanh toàn bộ đường tròn vì vậy nó sẽ đi từ không đến 2pi.

We will get integral from zero to 2pi of cosine square tdt which, if you do the calculation, turns out to be just pi. Now, let's instead try to use Stokes' theorem to do the calculation. Now, of course the smart choice would be to just take the flat unit disk. I am not going to do that. That would be too boring. Plus we have already kind of checked it because we already trust Green's theorem. Instead, just to convince you that, yes, I can choose really any surface I want, let's say that I'm going to choose a piece of paraboloid z equals one minus x squared minus y squared.
Chúng ta sẽ lấy tích phân từ không đến 2pi của cô sin bình tdt nó, nếu bạn thực hiện tính toán, hóa ra chỉ là pi. Bây giờ, thay vì vậy hãy thử dùng định lý Stokes để tính. Bây giờ, tất nhiên sự lựa chọn thông minh sẽ là chỉ chọn đường tròn đơn vị. Tôi sẽ không làm điều đó. Điều đó quá nhàm chán. Cộng chúng ta đã kiểm tra nó vì chúng ta tin tưởng định lí Green. Thay vào đó, chỉ để thuyết phục bạn rằng, có, tôi có thể chọn bất kỳ bề mặt nào tôi muốn, giả sử rằng tôi sẽ chọn một mảnh của paraboloid z bằng một trừ x bình trừ y bình.

Well, to get our conventions straight, we should take the normal vector pointing up for compatibility with our choice. Well, we will have to compute the flux through S. We don't really have to because we could have chosen the disk, it would be easier, but if we want to do it this way we will compute the flux of curl F through our paraboloid. How do we do that? Well, we need to find the curl and we need to find ndS. Let's start with the curl. Curl F let's take the cross-product between dell and F which is zxy. If we compute this, the i component will be one minus zero.
Vâng, để có được các quy ước, chúng ta sẽ lấy vector pháp tuyến hướng lên để tương thích với lựa chọn của chúng ta. Vâng, chúng ta sẽ phải tính thông lượng qua S. Chúng ta thực sự không cần tính vì chúng ta đã chọn hình tròn, nó sẽ dễ hơn, nhưng nếu chúng ta muốn làm nó theo cách này chúng ta sẽ tính thông lượng của curl F qua paraboloid của chúng ta. Chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, chúng ta cần phải tìm curl và chúng ta cần tìm ndS. Chúng ta hãy bắt đầu với curl. Curl F chúng ta hãy tính tích vector giữa del và F chính là zxy. Nếu chúng ta tính cái này, thành phần i sẽ là một trừ không.

It looks like it is one i. Minus the j component is zero minus one. Plus the k component is one minus zero. In fact, the curl of the field is one, one, one. Now, what about ndS? Well, this is a surface for which we know z is a function of x and y. ndS we can write as, let's call this F of xy, then we can use the formula that says ndS equals negative F sub x, negative F sub y, one dxdy, which here gives us 2x, 2y, one dxdy.
Có vẻ như nó là một i. Trừ thành phần j bằng không trừ một. Cộng thành phần k bằng một trừ không. Thực sự, curl của trường là một, một, một. Bây giờ, còn ndS thì sao? Vâng, đây là một bề mặt mà chúng ta biết z là một hàm của x và y. ndS chúng ta có thể viết như, hãy gọi đây là F của xy, thế thì chúng ta có thể dùng công thức ndS bằng trừ F x, trừ F y, dxdy, ở đây nó cho chúng ta 2x, 2y, dxdy.

Now, when we want to compute the flux, we will have to do double integral over S of one, one, one dot product with 2x, 2y, one dxdy. It will become the double integral of 2x plus 2y plus one dxdy. And, of course, the region which we are integrating, the range of values of x and y will be the shadow of our surface. That is just going to be, if you look at this paraboloid from above, all you will see is the unit disk so it will be a double integral of the unit disk. And the way we will do that, one way is to switch to polar coordinates and do the calculation and then you will end up with pi.
Bây giờ, khi chúng ta muốn tính thông lượng, chúng ta sẽ phải tính tích phân kép của một, một, một nhân vô hướng với 2x, 2y, dxdy trên S. Nó sẽ trở thành tích phân kép của 2x cộng 2y cộng dxdy. Và, tất nhiên, vùng mà chúng ta sẽ lấy tích phân, phạm vi của các giá trị của x và y sẽ là hình chiếu của bề mặt của chúng ta. Đó sẽ là, nếu bạn nhìn paraboloid này từ trên, bạn sẽ thấy một hình tròn đơn vị vì vậy nó sẽ là tích phân kép của hình tròn đơn vị. Và chúng ta tính nó bằng cách chuyển sang các tọa độ cực và được kết quả bằng pi.

The other way is to try to do it by symmetry. Observe, when you integrate x above

this, x is as negative on the left as it is positive on the right. So the integral of x will be zero. The integral of y will be zero also by symmetry. Then the integral of one dxdy will just be the area of this unit disk which is pi. That was our first example. And, of course, if you're actually free to choose your favorite surface, there is absolutely no reason why you would actually choose this paraboloid in this example.
Một cách khác là xét tính đối xứng. Quan sát, khi bạn lấy tích phân x trên cái này, x âm ở bên trái và dương ở bên phải. Vì vậy tích phân của x sẽ bằng không. Tích phân của y cũng bằng không do đối xứng. Thế thì tích phân của dxdy sẽ là diện tích của hình tròn đơn này bằng pi. Đó là ví dụ đầu tiên của chúng ta. Và, tất nhiên, nếu bạn tự do lựa chọn bề mặt yêu thích của bạn, không có lí do gì để bạn chọn paraboloid này.

I mean it would be much easier to choose a flat disk. OK. Tomorrow I will tell you a few more things about curl fits in with conservativeness and with the divergence theorem, Stokes all together, and we will look at Practice Exam 4B so please bring the exam with you.
Ý tôi là chọn hình tròn sẽ dễ tính hơn. OK. Ngày mai tôi sẽ cho bạn biết thêm một vài điều về curl tạo ra mối liên hệ giữa tính chất bảo toàn và định lí phân kỳ, định lí Stokes với nhau, và chúng ta sẽ xem xét bài thi thử 4B vì vậy hãy nhớ mang nó theo.