MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 30

Tích phân đường trong không gian, rot (hay curl), sự khớp và thế
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

Because we have, unfortunately, one more exam coming up next week, next Tuesday, so there are no practice exams. Actually they have been on the Web for a bit. Practice exam 4A, you are going to go over in recitation, part of it tomorrow, part of it on Monday. And practice exam 4B, we will go over in class on Tuesday, sorry, on Friday. Yes? When is our final in this class? Well, the final is, I believe, on Tuesday morning during finals week. Tuesday, December whatever, 18 maybe, in the morning. If you have a conflict for a final that should be automatically arranged through the Registrar. But please check with the Registrar or with the Math Office that you are on the list of a conflict final.

Bởi vì chúng ta có, tiếc là, có thêm một bài kiểm tra vào tuần tới, Thứ ba, vì vậy không có các bài thi thử. Thực sự chúng đã được đưa lên trang web một ít. Bài thi thử 4A, bạn sẽ làm chi tiết trong buổi trả lời câu hỏi miệng, một phần của nó vào ngày mai, một phần của nó vào ngày thứ hai. Và bài thi thử 4B, chúng ta sẽ xét kĩ trong buổi học ngày thứ ba, xin lỗi, thứ Sáu. Xin mời? Khi nào thi cuối kì à? Vâng, kì thi cuối kì, chắc là, vào sáng thứ ba trong tuần cuối. Thứ ba, Tháng Mười Hai vào ngày mấy đó, hình như là 18, vào buổi sáng. Nếu bạn trùng lịch vào kì thi cuối kì hãy thông báo với giáo vụ. Hãy kiểm tra với giáo vụ hoặc với Bộ môn toán để điều chỉnh lại.

Because I cannot arrange that. Only you and the Registrar and the Math Office. The other thing is the last lecture before the break ended a bit abruptly because I ran out of time, so just to summarize what the main point was, I mean probably you figured this out if you looked at the notes. It is not that important, but anyway. I just wanted to remind you, just to clarify what happened at the end, we got the diffusion equation from two bits of information. I mean the unknown, in this partial differential equation, is a function that we call u that corresponds to the concentration of some substance. And we used a vector field that represents the flow of whatever the substance is whose diffusion we are studying.

Bởi vì tôi không thể sắp xếp việc đó. Chỉ bạn và giáo vụ và Bộ môn toán. Điều khác là buổi học trước ngay khi sắp kết thúc bài giảng đã có một sự gián đoạn chút ít bởi vì không kịp giờ, vì vậy để tóm tắt những điểm chính, thật ra bạn sẽ thấy những thứ này trong note. Nhưng dù sao đi nữa, nó không quan trọng. Tôi chỉ muốn nhắc bạn, chỉ để làm rõ những vấn đề cuối buổi học trước, chúng ta đã nhận được phương trình khuếch tán từ hai nguồn tin. Ý tôi nói là biến, trong PTVP đạo hàm riêng này, là một hàm mà chúng ta gọi là u tương ứng với nồng độ của chất nào đó. Và chúng ta đã sử dụng một trường vector biểu diễn sự chảy của bất cứ vật chất nào đang khuếch tán.

And so we got two bits of information, one that came from physics that said the flow goes from high concentration to smaller concentration. And that told us that the flow is proportional to a negative gradient of a concentration. And the second piece of information that we got was from the divergence theorem, and that was the one I spent time trying to explain. And that one told us that the divergence of F is actually negative partial u over partial t. When you combine these two relations together that is how you get the diffusion equation. Sorry, I should say this is not the statement of a divergence theorem.

Và vì vậy chúng ta nhận được hai nguồn thông tin, một đến từ vật lí nói rằng dòng chảy đi từ nơi nồng độ cao đến nơi nồng độ thấp hơn. Và điều đó cho chúng ta biết rằng dòng chảy tỉ lệ thuận với trừ gradient của nồng độ. Và thông tin thứ hai chúng ta nhận được từ định lí divergence, và tôi đã sử dụng nhiều thời gian để giải thích nó. Và nó cho chúng ta biết rằng divergence của F bằng trừ đạo hàm riêng của u theo t. Khi bạn kết hợp hai hệ thức này với nhau bạn nhận được phương trình khuếch tán. Xin lỗi, đây không đúng là nội dung của định lí divergence.

This is something that would derive from it with quite a few steps involved. And so what we got out of that is a diffusion equation because we end up getting that partial u over partial t is minus div F, which is therefore positive k times divergence of grad u, which is what we denoted by del square u, the Laplacian. So, that is how we got the diffusion equation. Anyway, I will let you have a look at the notes that were handed out in case you really want to see more. I just wanted to give the missing part of the last lecture. Let me just switch gears completely and switch to today's topic, which is line integrals and work in 3D.

Đây là cái gì đó có thể rút ra từ nó qua một vài bước. Và như vậy những gì chúng ta đã rút ra được từ đó là phương trình khuếch tán bởi vì cuối cùng chúng ta nhận được đạo hàm riêng của u theo t bằng trừ div F, nó chính là cộng k nhân divergence của gradu, chúng ta đã kí hiệu nó là delta bình u, Laplace. Vì vậy, đó là cách chúng ta nhận được phương trình khuếch tán. Dù sao đi nữa, tôi sẽ để cho bạn xem các note đã được phát trong trường hợp bạn muốn hiểu thêm. Tôi chỉ muốn bổ sung phần còn thiếu của bài giảng lần trước. Hãy để tôi đạp số và chuyển hoàn toàn sang chủ đề của ngày hôm nay, đó là tích phân đường và công trong trường hợp ba chiều.

That is going to look a lot like what we did in the plane, except, of course, there is a z coordinate. You will see it doesn't change things much when it comes to computing a line integral. It changes things quite a bit, however, when it comes to testing whether a field is a gradient field. That is why we have to be more careful. Let's start right away with line integrals in space. Let's say that we have a vector field F with components P, Q and R. We should think of it maybe as representing a force.

Cách xét những đại lượng này cũng giống như trong mặt phẳng, ngoại trừ, tất nhiên, có tọa độ z. Bạn sẽ thấy không có nhiều sự thay đổi khi đến phần tính tích phân đường. Tuy nhiên, sẽ có một chút thay đổi, khi đến phần kiểm tra một trường có phải là trường gradient hay không. Đó là lý do tại sao chúng ta phải cẩn thận hơn. Hãy bắt đầu ngay với tích phân đường trong không gian. Giả sử rằng chúng ta có một trường vectơ F với các thành phần P, Q và R. Chúng ta có thể xem như nó biểu diễn một lực.

And let's say that we have a curve C in space. Then the work done by the field will be the line integral along C of F dot dr. That is a familiar formula. And what we do with that formula is also familiar, except now, of course, we have a z coordinate. We are going to think of vector dr as a space vector with components dx, dy and dz. When we do the dot product of F with dr that will tell us that we have to integrate Pdx Qdy Rdz. But it is still a line integral so it is still going to turn into a single integral when you plug in the correct values.
Và giả sử rằng chúng ta có một đường cong C trong không gian. Thế thì, công được thực hiện bởi trường sẽ bằng tích phân của F dot dr dọc theo C. Đó là một công thức quen thuộc. Và những gì chúng ta sẽ làm với công thức đó cũng quen thuộc, ngoại trừ bây giờ, tất nhiên, chúng ta có thành phần z. Chúng ta sẽ xem dr như một vector không gian với các thành phần dx, dy và dz. Khi chúng ta tính tích vô hướng của F với dr thì điều đó sẽ cho chúng ta biết rằng chúng ta phải lấy tích phân Pdx Qdy Rdz. Nhưng nó vẫn là một tích phân đường vì vậy nó vẫn sẽ chuyển thành tích phân một biến khi bạn thế các giá trị chính xác.

So the method will be exactly the same as in the plane, namely we will find some way to parameterize our curve, x plus x, y z in terms of a single variable, and then we will integrate with respect to that variable. The way that we evaluate is by parameterizing C and express x, y, z, dx, dy, dz in terms of the parameter. Let's do an example just to convince you that you actually know how to do this, or at least you should know how to do this.
Vì vậy phương pháp sẽ giống như trong mặt phẳng, cụ thể là chúng ta sẽ tìm cách nào đó để tham số hóa đường cong, x cộng x, y z theo một biến duy nhất, và sau đó chúng ta sẽ lấy tích phân theo biến đó. Cách chúng ta tính là tham số hóa C và biểu diễn x, y, z, dx, dy, dz theo tham số. Hãy xét một ví dụ để bảo đảm rằng bạn thực sự biết cách làm điều này, hoặc ít nhất bạn nên biết làm điều này.

Let's say that I give you the vector field with components yz, xz and xy. And let's say that we have a curve given by x equals t^3, y equals t^2, z equals t for t going from zero to one. The way we will set up the line integral for the work done will be -- Well, sorry. Before we actually set up the line integral, we need to know how we will express everything in terms of t and dt. x, y and z, in terms of t, are given here. We just need to do also dx, dy and dz. By differentiating you get dx is 3t^2 dt. That is the derivative of t^3, dy will be 2t dt and dz will just be dt.
Giả sử rằng tôi cho bạn trường vector với các thành phần yz, xz và xy. Và giả sử rằng chúng ta có đường cong được cho bởi phương trình tham số x bằng t ^ 3, y bằng t ^ 2, z bằng t với t đi từ không đến một. Cách chúng ta tính tích phân đường đối với công được thực hiện sẽ là - Vâng, xin lỗi. Trước khi chúng ta tính tích phân đường, chúng ta cần phải biết cách biểu diễn mọi thứ theo t và dt. x, y và z, theo t, được cho ở đây. Chúng ta chỉ cần làm tương tự với dx, dy và dz. Bằng cách lấy vi phân bạn nhận được dx bằng 3t ^ 2 dt. Đó là đạo hàm của t ^ 3, dy sẽ là 2t dt và dz sẽ chỉ là dt.

And we will evaluate the line integral for work. That will be the integral of yz dx xz dy xy dz, which will become -- yz is t^3 times dx is 3t^2 dt plus xz is t^4 times dy is 2t dt plus xy is t^5 dt. That just becomes the integral from, well, I guess t goes from zero to one, actually. And we are integrating three plus two plus one. That is 6t^5 dt which, I am sure you know, integrates to t^6, so we will just get one. It is the same method as usual. And if you are being given a geometric description of a curve then, of course, you will have to decide for yourself what the best parameter will be.
Và chúng ta sẽ tính tích phân đường cho công. Nó sẽ là tích phân của yz dx xz dy xy dz, nó sẽ trở thành - yz bằng t ^ 3 nhân dx bằng 3t ^ 2 dt cộng với xz bằng t ^ 4 nhân dy bằng 2t dt cộng xy bằng t ^ 5 dt. Nó sẽ trở thành tích phân từ, vâng, tôi đoán t đi từ không đến một. Và chúng ta sẽ lấy tích phân ba cộng hai cộng một. Đó là 6t ^ 5 dt, tôi chắc chắn bạn đã biết, tích phân của nó bằng t ^ 6, vì vậy kết quả sẽ chỉ là một. Nó giống như phương pháp bình thường. Và nếu bạn được cho một mô tả hình học của đường cong thế thì, tất nhiên, bạn sẽ phải tự quyết định tham số tốt nhất.

It might be some time parameter t like here. It might be one of the coordinates.

Here we could have used z as our parameter because, in fact, this curve is x equals x3 and y equals z2. And we could also have used maybe some angle. Well, not here, but if we had been moving on a circle or something like that. Any questions so far? No. OK. Well, because we can do a bit more practice, let's do another one where we do the same vector field F but our curve C will be going from the origin to the point (1, 0, 0) along the x-axis. Let's call that C1. Then to (1, 1, 0). Let's call that C2 by moving parallel to the y-axis. And then up to (1, 1, 1) parallel to the z-axis, let's call that C3.

Nó có thể là một tham số thời gian t như ở đây. Nó có thể là một trong những tọa độ. Ở đây chúng ta có thể đã dùng z như tham số bởi vì, quả thực, đường cong này là x bằng x3 và y bằng z2. Và chúng ta cũng có thể dùng góc nào đó. Vâng, không phải ở đây, nhưng nếu chúng ta chuyển động trên đường tròn hoặc thứ gì đó tương tự thế. Đến bây giờ có câu hỏi gì không? Không. OK. Vâng, bởi vì chúng ta có thể làm thực tế nhiều hơn một chút, chúng ta hãy xét ví dụ khác ở đó chúng ta cũng có trường vector tương tự F nhưng đường cong C của chúng ta sẽ đi từ gốc tọa độ đến điểm (1, 0, 0) dọc theo trục x. Hãy gọi đó là C1. Sau đó đến (1, 1, 0). Hãy gọi đó là C2 bằng cách di chuyển song song với trục y. Và sau đó lên đến (1, 1, 1) song song với trục z, chúng ta hãy gọi đó là C3.

I am sure that some of you at least are suspecting what I am getting at here, but let's not spoil it for those who don't see it yet. OK. If we want to compute the line integral along this guy then we have to break it into a sum of three terms. Well, maybe I should call that C', not C, because that is not the same C anymore. I want to do the sum of the line integrals along C1, C2 and C3. And, well, if I look at C1 and C2 they take place inside the x, y plane.

Tôi chắc chắn rằng một số bạn sẽ nghi ngờ về những gì tôi nhận được ở đây, nhưng chúng ta đừng hé lộ cho những người chưa biết nó. OK. Nếu chúng ta muốn tính tích phân đường dọc theo thằng này thì chúng ta phải tách nó ra thành tổng của ba số hạng. Vâng, có lẽ tôi nên gọi đó là C ', chứ không phải C, bởi vì cái đó không giống C nữa. Tôi muốn tính tổng của các tích phân đường dọc theo C1, C2 và C3. Và, vâng, nếu tôi xét C1 và C2 chúng xảy ra bên trong mặt phẳng x, y.

In fact, you know that z will be zero and dz will also be zero on both of these. And if you just look at the formula for line integral in the role of yz dx plus xz dy plus xy dz, well, it looks like if you plug z equals zero and dz equals zero you will just get zero. These are actually very fast. Let me write it. This is going to be zero, this is going to be zero, this is going to zero, and we will get zero. Now, if we do C3, well, there we might have to do some calculation, but it won't be all that bad.

Trong thực tế, bạn biết rằng z sẽ bằng không và dz cũng sẽ bằng không cho cả hai cái này. Và nếu bạn xét công thức cho tích phân đường trong vai trò của yz dx cộng xz dy cộng xy dz, vâng, có vẻ như nếu bạn thế z bằng không và dz bằng không kết quả sẽ bằng không. Tính những cái này rất nhanh. Hãy để tôi viết nó. Cái này sẽ bằng không, cái này sẽ bằng không, cái này sẽ bằng không, và kết quả sẽ bằng không. Bây giờ, nếu chúng ta tính đối với C3, vâng, ở đó có thể chúng ta phải thực hiện một số tính toán, nh ưng không phải tất cả đều tệ.

C3, well, x and y are both equal to one. And, of course, because they are constant that means dx is zero and dy is zero. On the other hand, z varies from zero to one. If I look at the line integral on C3 -- The first two terms, yz, dx and xz dy go away because the dx and dy are zero, so I am just left with xy dz. But because x and y are one it is just the integral of dz from zero to one, and that will just end up being one. If add these numbers together, zero plus zero plus one, I get one again.

C3, vâng, cả x và y đều bằng một. Và, tất nhiên, vì chúng là hằng số điều đó có nghĩa là dx bằng không và dy bằng không. Mặt khác, z thay đổi từ không đến một. Nếu tôi xét tích phân đường trên C3 - Hai số hạng đầu tiên, yz, dx và xz dy biến mất vì dx và dy bằng không, vì vậy tôi chỉ còn lại xy dz. Nhưng bởi vì x và y đều bằng một nó chỉ là tích phân của dz từ không đến một, và kết quả sẽ bằng một. Nếu cộng những số này với nhau, không cộng không cộng một, kết quả lại bằng một.

And, of course, it is not a coincidence because this vector field is a gradient field. I am sure some of you have already figured out what it is the gradient of. Otherwise, we will figure it out together. And so that is why we get the same answer for these two paths going both from the origin to (1, 1, 1). Maybe I should point out, to make it clear, that if you plug t equals zero in up there you will get (0, 0, 0).

Và, tất nhiên, đó không phải là sự trùng hợp vì trường vector này là trường gradient. Tôi chắc chắn rằng một số bạn đã tìm ra được gradient của nó. Nếu không, chúng ta sẽ cùng nhau tìm ra nó. Và vì vậy đó là lý do tại sao chúng ta nhận được cùng một kết quả cho hai đường đi từ gốc tọa độ đến (1, 1, 1). Có lẽ tôi nên chỉ ra, để cho rõ ràng, rằng nếu bạn thế t bằng không vào trên đó bạn sẽ nhận được (0, 0, 0).

If you plug t equals one, you will get (1, 1, 1). In fact -- F that we have here happens to be conservative. And, if you plug the two curves together -- Well, I am not really sure if I know how to plot this correctly. It is not exactly how it looks. Whatever. The first curve C goes from the origin to this point, and so does C ', just in a slightly more roundabout way. They both go from the origin to (1, 1, 1). It is not a surprise that you will get the same answer for both line integrals.

Nếu bạn thế t bằng một, bạn sẽ nhận được (1, 1, 1). Trong thực tế - F mà chúng ta có ở đây ngẫu nhiên bảo toàn. Và, nếu bạn thế hai đường cong đồng thời - Vâng, tôi không thực sự chắc chắn tôi có biết cách vẽ đồ thị cái n ày chính xác hay không. Không chính xác dạng của nó. Bất cứ cái gì. Đường cong đầu tiên C đi từ gốc tọa độ đến điểm này, và C ' cũng vậy, chỉ là đường hơi quanh co. Cả hai đều đi từ gốc tọa độ đến (1, 1, 1). Không có gì ngạc nhiên khi hai tích phân đường đó có cùng một kết quả.

And how do we see that? Well, actually here it is not very hard to find a function whose gradient is this vector field. Namely, the gradient of x, y, z looks like it should be exactly what we want. If you take partial of this with respect to x, you will get yz, then with respect to y, xz, and with respect to z, xy. And so, in fact, what was the easier way to compute these line integrals was to use the fundamental theorem of calculus.

Và làm thế nào để chúng ta thấy điều đó? Vâng, thực sự ở đây không khó để tìm hàm có gradient là trường vector này. Cụ thể, gradient của x, y, z hình như nó sẽ giống hệt với những gì chúng ta muốn. Nếu bạn lấy đạo hàm riêng của cái này theo x, bạn sẽ nhận được yz, sau đó theo y, xz, và theo z, xy. Và như vậy, trên thực tế, cách dễ hơn để tính các tích phân đường này là dùng định lí cơ bản của giải tích.

Once we have this remark, we don't need to compute these line integrals anymore. We can just use the fundamental theorem. If we know this fundamental theorem -- -- for line integrals, that tells us that the line integral of a gradient field is equal to the value of the potential at the final point minus the value of the potential at the starting point. And that, of course, only applies if you have a potential.
Sau khi có nhận xét này, chúng ta không cần tính những tích phân đường này nữa. Chúng ta chỉ cần sử dụng định lý cơ bản. Nếu chúng ta biết định lí cơ bản này - -- đối với các tích phân đường, điều đó sẽ cho chúng ta biết rằng tích phân đường của một trường gradient bằng thế tại điểm cuối trừ thế tại điểm đầu. Và điều đó, tất nhiên, chỉ áp dụng được nếu bạn có một thế.

So, in particular, only if you have a conservative field, a gradient field. Here, in our example, we have to look at, let's call little f of x, y, z that potential xyz, then we take f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0). And that indeed is one minus zero which is one. Everything is consistent. All this stuff so far works exactly as in the plane. Any questions? No. OK. Let's try to see where things do get a little bit different.
Vì vậy, đặc biệt, chỉ nếu bạn có trường bảo toàn, một trường gradient. Ở đây, trong ví dụ của chúng ta, chúng ta hãy xét, chúng ta hãy gọi f nhỏ của x, y, z là thế xyz đó, sau đó chúng ta lấy f (1, 1, 1) - f (0, 0, 0). Và nó bằng một trừ không bằng một. Mọi thứ phù hợp. Tất cả mọi thứ cho đến lúc này giống như trong mặt phẳng. Câu hỏi? No. OK. Hãy xét xem tích phân đường trong không gian có gì khác biệt.

And the first such place is when we try to test whether a vector field is a gradient field. Remember when we had a vector field in the plane, to know whether it was a gradient of a function of two variables we just had to check one condition, N sub x equals M sub y. Now we actually have three different conditions to check, and that means, of course, more work. OK. So what is our test for gradient fields? We want to know whether a given vector field with components P, Q and R can be written as f sub x, f sub y and f sub z for a same function F. And for that to possibly happen, well, we need certainly some relations between P, Q and R. And, as before, this comes from the fact that the mixed second derivatives are the same, no matter in which order you take them.

Và điểm tạo nên sự khác biện trước hết là khi chúng ta thử kiểm tra một trường vector có phải là trường gradient hay không. Hãy nhớ rằng khi chúng ta có một trường vectơ trong mặt phẳng, để biết nó có phải là gradient của hàm hai biến hay không chúng ta chỉ phải kiểm tra một điều kiện, N x bằng M y. Bây giờ chúng ta thực sự có ba điều kiện khác nhau để kiểm tra, và điều đó có nghĩa là, tất nhiên, tốn thêm công sức. OK. Vì vậy, phép kiểm tra trường gradient của chúng ta là gì? Chúng ta muốn biết một trường vector cho trước với các thành phần P, Q và R có thể được viết là f x, f y và f z đối với cùng hàm F hay không. Và để cho điều đó có thể xảy ra, vâng, tất nhiên chúng ta cần một số hệ thức giữa P , Q và R. Và, như trước, điều này xuất phát từ việc các đạo hàm bậc hai hỗn hợp giống nhau, bạn lấy chúng theo thứ tự nào không quan trọng.

If that is the case then I can compute f sub xy, which is the same as f sub yx in two different ways. F sub xy should be P sub y. F sub yx, well, since f sub y is Q, that should be Q sub x. That is a part of a criterion that we already had when we had only two variables. But now, of course, we need to do the same thing when we look at x and z or y and z. That gives us two more conditions. P sub z is f sub xz, which is the same as f sub zx, so it should be the same as R sub x.
Nếu điều đó đúng thì tôi có thể tính f xy, nó bằng với f yx theo hai cách khác nhau. F xy sẽ bằng P y. F yx, vâng, vì f y bằng Q, nó sẽ bằng Q x. Đó là một phần của điều kiện khi chúng ta xét hàm hai biến. Nhưng bây giờ, tất nhiên, chúng ta cần làm điều tương tự khi chúng ta xét x và z hoặc y và z. Điều đó cho chúng ta thêm hai điều kiện. P z bằng f xz, nó giống như f zx, vì vậy nó sẽ giống như R x.

Finally, Q sub z, which is f sub yz, equals f sub zy equals R sub y. We have three conditions, so our criterion -- Vector field F equals <P, Q, R>. And here, to be completely truthful, I have to say defined in a simply connected region. Otherwise, we might have the same kind of strange things happening as before. Let's not worry too much about it. For accuracy we need our vector field to be defined in a simply connected region. And example is just if it is defined everywhere. If you don't have any evil eliminators then you can just go ahead and there is no problem. It is a gradient field.
Cuối cùng, Q z, bằng f yz, bằng f zy bằng R y. Chúng ta có ba điều kiện, vâng tiêu chuẩn của chúng ta – Trường vector F bằng <P, Q, R>. Và ở đây, để hoàn toàn trung thực, tôi phải nói được xác định trong vùng đơn liên. Nếu không, chúng ta có thể có nhiều điều lạ xảy ra tương tự như lần trước. Đừng lo lắng nhiều về nó. Để chính xác chúng ta cần trường vector của chúng ta xác định trong vùng đơn liên. Và ví dụ là nếu nó được xác định ở khắp mọi nơi. Nếu bạn không có bất kỳ thiết bị khử nào thì bạn có thể đi trước và không có vấn đề gì. Nó là một trường gradient.

We need three conditions. Let's do it in order. P sub y equals Q sub x. And we have P sub z equals R sub x and Q sub z equals R sub y. How do you remember these three conditions? Well, it is pretty easy. You pick any two components, say the x and the z component, and you take the partial of the x component with respect to z, the partial of the z component with respect to x and you must make them equal. And the same with every pair of variables.
Chúng ta cần ba điều kiện. Chúng ta hãy làm nó theo thứ tự. P y bằng Q x. Và chúng ta có P z bằng R x và Q z bằng R y. Làm thế nào để bạn nhớ ba điều kiện này? Vâng, nó khá dễ. Bạn chọn bất kỳ hai thành phần, giả sử thành phần x và z, và bạn lấy đạo hàm riêng của f x theo z, đạo hàm riêng của f z theo x và bạn cho chúng bằng nhau. Và tương tự với mỗi cặp biến.

In fact, if you had a function of many more variables the criterion would still look exactly like that. For every pair of components the mixed partials must be the same. But we are not going to go beyond three variables so you don't need to know that. This you need to know so let me box it. That is pretty straightforward. Let's do an example just to see how it goes. By the way, we can also think of it in terms of differentials.
Trong thực tế, nếu bạn có một hàm nhiều biến hơn nữa tiêu chuẩn sẽ vẫn giống như thế. Mỗi cặp thành phần của các đạo hàm riêng hỗn hợp phải bằng nhau. Nhưng chúng ta sẽ không vượt quá ba biến vì vậy bạn không cần biết điều đó. Bạn cần biết điều này vì vậy hãy để tôi đóng khung nó. Điều đó khá dễ. Hãy làm một ví dụ để xem nó như thế nào. Nhân đây, chúng ta cũng có thể nghĩ về nó theo các vi phân.

Before I do the example, let me just say in a different language. If we have a differential given to us of a form Pdx Qdy Rdz is going to be an exact differential, which means it is equal to df for some function F exactly and of the same conditions. That is the same thing. Just in the language of differentials. The example that I promised. Of course, I could do again the same one over there and check that it satisfies the condition, but then it wouldn't be much fun. So let's do a better one.

Actually, let's do it in a way that looks like an exam problem. Let's say for which a and b is a xy dx plus –

Trước khi tôi làm ví dụ, hãy để tôi diễn đạt theo cách khác. Nếu chúng ta có vi phân được cho dưới dạng Pdx Qdy Rdz là một vi phân toàn phần, có nghĩa là nó bằng df đối với hàm F nào đó và trong cùng điều kiện. Đó là điều tương tự. Chỉ là theo ngôn ngữ vi phân. Ví dụ mà tôi đã hứa. Tất nhiên, tôi có thể làm lại cái tương tự trên đó và kiểm tra nó có thõa mãn điều kiện hay không, nhưng thế thì sẽ không vui lắm. Vì vậy, hãy để tôi làm cách khác tốt hơn. Trên thực tế, hãy làm bài đó theo cách giống như làm bài thi. Giả sử rằng đối với nó a và b là a xy dx cộng -

Oh, it is not going to fit here. But it will fit here. a xy dx (x^2 z^3) dy (byz^2 - 4z^3) dz, an exact differential. Or, if you don't like exact differentials, for which a and b is the corresponding vector field with i, j and k instead, a gradient field. Let's just apply the criterion. And, of course, you can guess that what will follow is figuring out how to find the potential when there is one.

Oh, nó sẽ không khớp ở đây. Nhưng nó sẽ phù hợp ở đây. a xy dx (x ^ 2 z ^ 3) dy (byz ^ 2 -4z ^ 3) dz, một vi phân toàn phần. Hoặc, nếu bạn không thích vi phân toàn phần, đối với nó a và b tương ứng với trường vector với i, j và k thay vì vậy, một trường gradient. Chúng ta hãy áp dụng tiêu chuẩn. Và, tất nhiên, bạn có thể đoán ra điều tiếp teho là tìm thế khi có một cái.

Let's do it one by one. We want to compare P sub y with Q sub x, we want to compare P sub z with R sub x and we want to compare Q sub z with R sub y where we call P, Q and R these guys. Let's see. What is P sub y? That seems to be ax. What is Q sub x? 2x. Q is this one. Actually, let me write them down. Because otherwise I am going to get confused myself. This guy here, that is P, this guy here, that is Q and that guy here, that is R. This one tells us that a should be equal to two of the first product that you hold. OK.

Hãy làm điều đó từng cái một. Chúng ta cần so sánh P y với Q x, chúng ta cần so sánh P z với R x và chúng ta cần so sánh Q z với R y ở đây chúng ta gọi P, Q, R là những thằng này. Xem nào. P y là gì? Nó dường như là ax. Q x là gì? 2x. Q là cái này. Thực sự, hãy để tôi viết điều đó ra. Bởi vì nếu không tôi dễ bị nhầm. Thằng này ở đây, đó là P, thằng này ở đây, đó là Q và thằng đó ở đây, đó là R. Cái này cho chúng ta biết rằng a sẽ bằng hai. OK.

Let's look at P sub z. That is just zero. R sub x? Well, R doesn't have any x either so that is zero. This one is not a problem. Q sub z? Well, that seems to be 3z2. R sub y seems to be bz2, so b should be equal to three. We need to have a equals two and, this is an and, not or, b equals three for this to be exact. For those values of a and b, we can look for a potential using the method that we are going to see right now. For any other values of a and b we cannot. If we have to compute a line integral, we have to do it by finding a parameter and setting up everything. Any questions at this point? Yes?

Chúng ta hãy xét P z. Nó đúng bằng không. R x? Vâng, R không có bất kỳ x nào nên đạo hàm theo x bằng không. Cái này không khó. Q z? Vâng, nó có vẻ là 3z2. R y có vẻ là bz2, vì vậy b sẽ bằng ba. Chúng ta cần phải có a bằng hai và, đây là một và không hoặc, b bằng ba cho cái này là chính xác. Đối với những giá trị này của a và b, chúng ta có thể tìm thế dùng phương pháp mà chúng ta sẽ thấy ngay bây giờ. Đối với bất cứ giá trị khác của a và b, chúng ta không thể. Nếu chúng ta phải tính tích phân đường, chúng ta phải làm nó bằng cách tìm một tham số và thiết lập mọi thứ. Câu hỏi? Xin mời?

I see. Well, if I got the same answer, oh, did say bz^2 or 3bz^2? Well, 3bz^2, for example, I would need b to be zero because the only time that 3bz2 equals bz2 as not just at one point but everywhere, I need them to be the same function of x, y, z. Well, if a coefficient of z2 is the same that would be give b equals 3b, that would give me b equals zero. If you got bz2 on both sides then it would mean for any value of b it works, and you wouldn't have to worry about what the value of b is. Any other questions? No. OK. Now, how do we find the potential?

Tôi hiểu rồi. Vâng, nếu tôi nhận được cùng một kết quả, oh, giả sử bz ^ 2 hoặc 3bz ^ 2? Vâng, 3bz ^ 2, ví dụ, tôi sẽ cần b bằng không vì chỉ khi 3bz2 bằng bz2 không chỉ tại một điểm mà ở mọi nơi, tôi cần chúng là cùng một hàm của x, y, z. Vâng, nếu hệ số của z2 giống như khi cho b bằng 3b, thì b sẽ bằng không. Nếu bạn nhận được bz2 ở cả hai vế thì có nghĩa là đối với bất kì giá trị nào của b nó cũng đúng, và bạn sẽ không phải lo lắng về giá trị của b. Bất kỳ câu hỏi nào khác? No. OK. Bây giờ, chúng ta tìm thế như thế nào?

Well, there are two methods as before. One of them, I don't remember if it was the first one or the second one last time, but it really doesn't matter. One of them was just to say that the value of F at the point, let me call that x1, y1, z1, is equal to the line integral of my field along a well-chosen curve plus, of course, a constant, which is going to be the integration constant. And the kind of curve that I will take to do this calculation will just be my favorite curve going from the origin to the point x1, y1, z1.

Vâng, có hai phương pháp như trước. Một trong số chúng, tôi không nhớ nó là cái đầu hai cái thứ hai tương ứng với lần trước, nhưng thực sự không quan trọng. Một trong số chúng nói rằng giá trị của F tại điểm, hãy để tôi gọi x1, y1, z1, bằng tích phân đường của trường của tôi dọc theo đường cong được chọn thích hợp cộng, tất nhiên, một hằng số, nó sẽ là hằng số tích phân. Và loại đường cong mà tôi sẽ chọn để thực hiện tính toán này sẽ là đường cong yêu thích của tôi đi từ gốc tọa độ đến điểm x1, y1, z1.

And so, typically the most common choice would be to go just first along the x-axis, then parallel to the y-axis and then parallel to the z-axis all the way to my point x1, y1, z1. I would just calculate three easy line integrals. Add them together and that would give me the value of my function. That method works exactly the same way as it did in two variables. Now, I seem to recall that you guys mostly preferred the other method. I am going to tell you about the other method as well, but I just want to point out this one actually doesn't become more complicated. The other one has actually more steps.

Và như vậy, thông thường lựa chọn phổ biến nhất sẽ là đầu tiên đi dọc theo trục x, sau đó song song với trục y và sau đó song song với trục z đến điểm x1, y1, z1. Tôi sẽ chỉ tính ba tích phân đường dễ. Cộng chúng với nhau và điều đó sẽ cho tôi giá trị hàm của tôi. Nguyên tắc của phương pháp đó giống tương tự như trong hàm hai biến. Bây giờ, tôi nhớ lại rằng đa số các bạn thích phương pháp còn lại. Tôi cũng sẽ cho bạn biết về phương pháp còn lại, nhưng tôi muốnchỉ ra cái này thực sự không trở nên phức tạp hơn.

Cái kia có nhiều bước.

I mean, of course, here there are also a bit more steps because you have three parts to your path instead of two. You have three line integrals to compute instead of two, but conceptually it remains exactly the same idea. I should say it works the same way as in 2D. Not much changes. Let's look at the other method using anti-derivatives. Remember we want to find a function little f whose partials are exactly the things we have been given. We want to solve, well, let me plug in the values of a and b that will work. We said a should be two, so f sub x should be 2xy, f sub y should be x2 plus z3, and f sub z should be $3yz^2$ minus $4z^3$.
Ý tôi là, tất nhiên, ở đây cũng có thêm các bước bởi vì bạn có ba phần của đường lấy tích phân thay vì hai. Bạn có ba tích phân đường để tính thay vì hai, nhưng về mặt khái niệm nó vẫn là cùng một ý tưởng. Nguyên tắc của nó giống như trong không gian hai chiều. Không có nhiều thay đổi. Hãy xét phương pháp còn lại dùng nguyên hàm. Hãy nhớ rằng chúng ta muốn tìm một hàm f nhỏ mà đạo hàm riêng của nó chính là những thứ mà chúng ta đã được cho. Chúng ta muốn giải, vâng, hãy để tôi thế các giá trị của a và b. Chúng ta đã nói a sẽ bằng hai, do đó f x sẽ bằng 2xy, f y sẽ bằng x2 cộng với z3, và f z sẽ bằng $3yz^2$ trừ $4z^3$.

We are going to look at them one at a time and get partial information on the function. And then we will compare with the others to get more information until we are completely done. The first thing we will do, we know that f sub x is 2xy. That should tell us something about f. Well, let's just integrate that with respect to x. Let me write integral dx next to that. That tells us that f should be, well, if we integrate that with respect to x, 2x integrates to x^2, so we should get x2y.
Chúng ta sẽ xét chúng một cái một lần và nhận được thông tin về đạo hàm riêng trên hàm. Và sau đó chúng ta sẽ so sánh với những cái còn lại để nhận thêm thông tin cho đến khi chúng ta thực hiện hoàn chỉnh. Điều đầu tiên chúng ta sẽ làm, chúng ta biết rằng f x bằng 2xy. Nó cho chúng ta biết điều gì đó về f. Vâng, hãy để tôi lấy tích phân cái đó theo x. Hãy để tôi viết tích phân dx kế bên cái đó. Điều đó cho chúng ta biết rằng f sẽ là, vâng, nếu chúng ta lấy tích phân nó theo x, 2x tích phân là x^2, vì vậy chúng ta sẽ nhận được x2y.

Plus, of course, an integration constant. Now, what do we mean by integration constant. It means that for given values of y and z we will get a term that does not depend on x. It still depends on y and z. In fact, what we get is a function of y and z.
Cộng, tất nhiên, một hằng số tích phân. Bây giờ, ý nghĩa của hằng số tích phân là gì. Có nghĩa là đối với giá trị nhất định của y và z, chúng ta sẽ nhận được một số hạng không phụ thuộc x. Nó vẫn còn phụ thuộc vào y và z. Trong thực tế, những gì chúng ta nhận được là hàm của y và z.

See, if you took the derivative of this with respect to x you will get 2xy and this guy will go away because there is no x in it. That is the first step. Now we need to get some information on g. How do we do that? Well, we look at the other partials. F sub y, we want that to be x^2 z^3. But we have another way to find it, which is starting from this and differentiating.
Thấy không, nếu bạn lấy đạo hàm cái này theo x bạn sẽ nhận được 2xy và thằng này sẽ biến mất bởi vì không có x trong nó. Đó là bước đầu tiên. Bây giờ chúng ta cần phải nhận thêm một số thông tin về g. Chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, chúng ta xét các đạo hàm riêng khác. F y, chúng ta muốn cái đó là x ^ 2 z ^ 3. Nhưng chúng ta có một cách khác để tìm nó, đó là bắt đầu từ cái này và vi phân.

Let me try to use color for this. Now, if I take the partial of this with respect to y, I am going to get a different formula for f sub y. That will be x^2 plus g sub y. Well, if I compare these two expressions that tells me that g sub y should be z3. Now, if I have this I can integrate with respect to y. That will tell me that g is actually yz^3 plus an integration constant. That constant, again, does not depend on y, but it can still depend on z because we still have not said anything about partial with respect to z.
Hãy để tôi thử dùng màu cho cái này. Bây giờ, nếu tôi lấy đạo hàm riêng của cái này theo y, tôi sẽ nhận được công thức khác cho fy. Đó sẽ là x ^ 2 cộng g y. Vâng, nếu tôi so sánh hai biểu thức này nó sẽ cho chúng ta biết rằng g y sẽ bằng z3. Bây giờ, nếu tôi có cái này tôi có thể lấy tích phân theo y. Điều đó sẽ cho tôi biết rằng g thực sự bằng yz ^ 3 cộng một hằng số tích phân. Hằng số đó, một lần nữa, không phụ thuộc vào y, nhưng nó có thể vẫn còn phụ thuộc vào z bởi vì vẫn chưa nói bất cứ điều gì về đạo hàm riêng theo z.

In fact, that constant I will write as a function h of z. If I have this function of z and I take its partial with respect to y, I will still get z^3 no matter what h was. Now, how do I find h? Well, obviously, I have to look at f sub z. F sub z. We know from the given vector field that we want it to be 3yz^2 minus 4z^3. In case you are wondering where that came from, that was R. But that is also obtained by differentiating with respect to z what we had so far. Sorry. What did we have so far?
Trong thực tế, hằng số đó tôi sẽ viết như hàm của h z. Nếu tôi có hàm này của z và tôi lấy đạo hàm riêng của nó theo y, tôi vẫn sẽ nhận được z ^ 3 bất kể h là bao nhiêu. Bây giờ, làm cách nào để tìm h? Vâng, rõ ràng, tôi phải xét f z. F z. Chúng ta biết từ trường vector được cho rằng chúng ta muốn nó sẽ là 3yz ^ 2 trừ 4z ^ 3. Trong trường hợp bạn thắc mắc nó đến từ đâu, đó là R. Nhưng điều đó cũng thu được bằng cách lấy vi phân theo z của những gì mà chúng ta có cho đến bây giờ. Xin lỗi. Đến lúc này chúng ta đã làm gì?

Well, we had f equals x^2y plus g. And we said g is actually yz^3 plus h of z. That is what we have so far. If we take the derivative of that with respect to z, we will get zero plus 3yz^2 plus h prime of z, or dh dz as you want. Now, if we compare these two, we will get the derivative of h. It will tell us that h prime is negative for z3. That means that h is negative z^4 plus a constant. And this it is at last an actual constant.
Vâng, chúng ta có f bằng x ^ 2y cộng với g. Và chúng ta đã nói g thực sự bằng yz ^ 3 cộng với h z. Đó là những gì chúng ta có cho đến lúc này. Nếu chúng ta lấy đạo hàm của cái đó theo z, chúng ta sẽ nhận được không cộng 3yz ^ 2 cộng h phẩy z, hoặc dh dz như bạn muốn. Bây giờ, nếu chúng ta so sánh hai cái này, chúng ta sẽ nhận được đạo hàm của h. Nó sẽ cho chúng ta biết rằng h phẩy bằng trừ đối với z3. Điều đó có nghĩa là h bằng trừ z ^ 4 cộng với một hằng số. Và đây là lúc cuối cùng của một hằng số thực sự.

Because it does not depend on z and there is nothing else for it to depend on. Now we plug this into what we had before, and that will give us our function f. We get that f=x^2y yz^3 - z^4 plus constant. If you just wanted to find one potential, you can just forget the constant. This guy was a potential. If you want all the potentials they differ by this constant. OK. Just to recap the method what did we do? We started with –
Bởi vì nó không phụ thuộc vào z và không có gì khác để nó phụ thuộc vào. Bây giờ chúng

ta thế cái này vào những gì chúng ta đã có từ trước, và điều đó sẽ cho chúng ta hàm f. Chúng ta nhận được f = x ^ 2y yz ^ 3 - z ^ 4 cộng với hằng số. Nếu bạn chỉ muốn tìm một thế, bạn chỉ cần quên hằng số. Thằng này là thế. Nếu bạn muốn tất cả các thế chúng khác nhau một hằng số. OK. Chỉ cần tóm tắt phương pháp chúng ta đã làm là gì? Chúng ta đã bắt đầu với -

And, of course, you can do it in whichever order you prefer, but you have to still follow the systematic method. You start with f sub x and you integrate that with respect to x. That gives you f up to a function of y and z only. Now you compare f sub y as given to you by the vector field with the formula you get from this expression for f. And, of course, this one will involve g sub y. Out of this, you will get the value of g sub y. When you have g sub y that gives you g up to a function of z only.
Và, tất nhiên, bạn có thể làm theo bất cứ thứ tự nào bạn thích, nhưng bạn vẫn phải theo phương pháp có hệ thống. Bạn bắt đầu với f x và bạn lấy tích phân nó theo x. Kết quả là hàm f chỉ phụ thuộc vào y và z. Bây giờ bạn so sánh f y được cho bạn qua trường vector với công thức bạn nhận được từ biểu thức này của f. Và, tất nhiên, cái này sẽ liên quan đến g y. Do cái này, bạn sẽ nhận được giá trị của g y. Khi bạn đã có g y nó lại sẽ cho bạn g chỉ là hàm theo z.

And so now you have f up to a function of z only. And what you will do is look at the derivative with respect to z, the one you want coming from the vector field and the one you have coming from this formula for f, match them and that will tell you h prime. You will get h and then you will get f. Any questions? Who still prefers this method? OK, still most of you. Who is thinking that maybe the other method was not so bad after all? OK. That is still a minority. You can choose whichever one you prefer. I would encourage you to get some practice by trying both on least a couple of examples just to make sure that you know how to do them both and then stick to whichever one you prefer.
Và vì vậy bây giờ bạn có f chỉ là hàm theo z. Và những gì bạn sẽ làm là xét đạo hàm theo z, cái mà bạn muốn đến từ trường vector và cái mà bạn có được từ công thức này của f, khớp chúng và điều đó sẽ cho bạn h phẩy. Bạn sẽ nhận được h và sau đó bạn sẽ nhận được f. Câu hỏi? Ai vẫn thích phương pháp này? OK, vẫn còn đa số các bạn. Ai thích phương pháp kia sau quá trình tính toán nãy giờ? OK. Chỉ có một thiểu số. Bạn có thể chọn cái nào bạn thích. Tôi khuyên bạn nên dùng các phương pháp này để làm các ví dụ để chắc chắn rằng bạn biết được cả hai phương pháp và sau đó chọn phương pháp nào mà bạn thích.

Any questions on that? No. I guess I already asked. Still no questions? OK. The next logical thing is going to be curl. And the theorem that is going to replace Green's theorem for work in this setting is going to be called Stokes' theorem. Let me start by telling you about curl in 3D. Here is the statement. The curl is just going to measure how much your vector field fails to be conservative. And, if you want to think about it in terms of motions, that also will measure the rotation part of the motion.
Câu hỏi? Không. Tôi đoán tôi đã trả lời rồi. Vẫn không có câu hỏi? OK. Tiếp theo mạch logic sẽ là curl. Và định lí sẽ thay thế định lí Green cho công trong thiết lập n ày sẽ là định lí Stokes. Hãy để tôi bắt đầu bằng cách nói cho bạn về curl trong không gian ba chiều. Dưới đây là nội dung. Curl sẽ đo trường vector của bạn không bảo to àn bao nhiêu. Và, nếu bạn muốn nghĩ về nó theo chuyển động, nó cũng đo phần quay của chuyển động.

Well, let me first give a definition. Let's say that my vector field has components P, Q and R. Then we define the curl of F to be R sub y minus Q sub z times i plus P sub z minus R sub x times j plus Q sub x minus P sub y times k. And of course nobody can remember this formula, so what is the structure of this formula? Well, you see, each of these guys is one of the things that have to be zero for our field to be conservative.
Vâng, đầu tiên là định nghĩa. Giả sử rằng trường vector của tôi có các th ành phần P, Q và R. Thế thì, chúng ta định nghĩa curl của F sẽ là R y trừ Q z nhân i cộng P z trừ R x nhân j cộng Q x trừ P y nhân k. Và tất nhiên không ai có thể nhớ công thức này, vậy cấu trúc của công thức n ày là gì? Vâng, bạn thấy, mỗi thằng này là một trong những thứ phải bằng không để tr ường của chúng ta bảo toàn.

If F is defined in a simply connected region then we have that F is conservative and is equivalent to if and only if curl F is zero. Now, an important difference between curl here and curl in the plane is that now the curl of a vector field is again a vector field. These expressions are functions of x, y, z and together you form a vector out of them. The curl of a vector field in space is actually a vector field, not a scalar function. I have delayed the inevitable.
Nếu F được xác định trong vùng đơn liên thì chúng ta có F bảo toàn và tương đương nếu và chỉ nếu curl F bằng không. Bây giờ, một sự khác biệt quan trọng giữa curl ở đây và curl trong mặt phẳng là bây giờ curl của một trường vector lại là một trường vector. Những biểu thức này là hàm của x, y, z và cùng nhau bạn hình thành một vector từ chúng. Curl của một trường vectơ trong không gian thực sự là một trường vector, không phải là một hàm vô hướng. Tôi đã trì hoãn một việc nên làm.

I have to really tell you how to remember this evil formula. The secret is that, in fact, you can think of this as del cross f. Maybe you have seen that in physics. This is really where this del notation becomes extremely useful, because that is basically the only way to remember the formula for curl. Remember we introduced the dell operator. That was this symbolic vector operator in which the components are the partial derivative operators.
Thực sự tôi phải cho bạn biết cách nhớ công thức độc ác n ày. Bí mật ở đây là, trong thực tế, bạn có thể xem cái này như là del cross f. Có lẽ bạn đã thấy điều đó trong vật lý. Đây là nơi kí hiệu del trở nên cực kì hữu dụng, bởi vì về cơ bản đó là cách duy nh ất để nhớ công thức của curl. H ãy nhớ rằng chúng ta đã đưa vào toán tử del. Đó là toán tử vector tượng trưng này trong đó các thành ph ần là các toán tử đạo hàm riêng.

We have seen that if you apply this to a scalar function then that will give you the gradient. And we have seen that if you do the dot product between dell and a vector field, maybe I should give it components P, Q and R, you will get partial P over partial x plus partial Q over partial y plus partial R over partial z, which is the divergence. And so now what is new is that if I try to do dell cross F, well, what is dell cross F? I have to set up a cross-product between this strange thing that is not

really a vector. I mean, I cannot really think of partial over partial x as a number. And my vector field <P, Q, R>. See, that is really a completely perverted use of a determinant notation.
Chúng tôi đã thấy rằng nếu bạn áp dụng cái này cho hàm vô hướng thì nó sẽ cho bạn gradient. Và chúng ta đã thấy rằng nếu bạn thực hiện tích vô hướng giữa del và một trường vector, có lẽ tôi nên cho các thành phần của nó là P, Q và R, bạn sẽ nhận được đạo hàm riêng của P theo x cộng đạo hàm riêng của Q theo y cộng đạo hàm riêng của R theo z, là divergence. Và vì vậy bây giờ những gì mới là nếu tôi thử tính dell cross F, vâng, dell cross F bằng cái gì? Tôi phải thiết lập tích vector giữa thứ lạ này không phải là một vector. Ý tôi là, tôi không thể xem đạo hàm riêng theo x như một số. Và trường vector của tôi <P, Q, R>. Thấy không, nó là cách dùng hoàn toàn sai của khái niệm định thức.

Initially, determinants were just supposed to be you had a three by three table of numbers and you computed a number out of them. These guys are functions so they count as numbers, but these are vectors and these are partial derivatives. It doesn't really make much sense, except this notation. If you try to enter this into a calculator or computer, it will just yell back at you saying are you crazy. [LAUGHTER]
Ban đầu, các định thức được giả sử là bạn đã có một bảng các con số ba nhân ba và bạn tính toán để rút ra được một số từ chúng. Những thằng này là các hàm vì vậy chúng tính như các con số, nhưng đây là những vectơ và đây là những đạo hàm riêng. Nó không thực sự có ý nghĩa nhiều, ngoại trừ ký hiệu này. Nếu bạn thử đưa cái này vào máy tính hoặc máy điện toán, nó sẽ báo lỗi.

We just use that as a notation to remember what is in there. Let's try and see how that works. The component of i in this cross-product, remember that is this smaller determinant, that smaller determinant is partial over partial y of R minus partial over partial z of Q, the coefficient of i. And that seems to be what I had over there. If not then I made a mistake. Minus the next determinant times z. Remember there is always a minus sign in front of a j component when you do a cross-product. The other one is partial over partial x R minus partial over partial z of P plus the

component of z which is going to be partial over partial x Q minus partial over partial y P. And that is indeed going to be the curl of F.
Chúng ta chỉ sử dụng nó như là một cách ghi nhớ những gì có trong đó. Hãy thử và xem quy tắc của nó như thế nào. Thành phần i trong tích vector này, hãy nhớ đó là định thức nhỏ hơn này, định thức nhỏ hơn đó là đạo hàm riêng theo y của R trừ đạo hàm riêng theo z của Q, hệ số của i. Và đó có vẻ như là những gì tôi đã có ở đằng kia. Nếu không thì tôi đã làm sai. Trừ định thức kế tiếp nhân j. Hãy nhớ rằng luôn luôn có một dấu trừ trước thành phần j khi bạn tính tích vector. Nó bằng đạo hàm riêng theo x của R trừ đạo hàm riêng theo z của P cộng thành phần j sẽ là đạo hàm riêng theo x của Q trừ đạo hàm riêng theo y P. Và đó là curl F.

In practice, if you have to compute the curl of a vector field, you know, don't try to remember this formula. Just set up this cross-product with whatever formulas you have for the components of a field and then compute it. Don't bother to try to remember the general formula, just remember this. What is the geometric interpretation of curl, just to finish? In a way, I will say just curl measures the rotation component in a velocity field.
Trong thực tế, nếu bạn phải tính toán curl của một trường vector, bạn đã biết, đừng cố nhớ công thức này. Chỉ cần thiết lập tích vector này với bất cứ công thức nào mà bạn có đối với các thành phần của trường và sau đó tính chúng. Đừng nhớ công thức tổng quát, chỉ nhớ cái này. Để hoàn thành chúng, chúng ta sẽ giải thích ý nghĩa hình học của curl là gì? Theo cách nào đó, tôi sẽ nói rằng curl đo thành phần quay của trường vận tốc.

An exercise that you can do, which is actually pretty easy to check, is say that we have a fluid that is just rotating about the x-axis uniformly. Your fluid is just rotating like that about the z-axis. If I take a rotation about the z-axis. That is given by a velocity field with components at angular velocity omega. That will be negative omega times y, then omega x and zero. And the curl of that you can compute, and you will find two omega times k.
Bạn có thể làm bài tập, nó dễ kiểm tra, là bài ví dụ như chúng ta có một chất lưu chỉ quay đều quanh trục x. Chất lưu của bạn chỉ quay như thế quanh trục z. Nếu tôi chọn quay quanh trục z. Nó được cho bởi một trường vận tốc với các thành phần có vận tốc góc omega. Đó sẽ là trừ omega nhân y, rồi omega x và không. Và curl của nó bạn có thể tính toán, và bạn sẽ tìm được là hai omega nhân k.

Concretely, this curl gives you the angular velocity of the rotation, well, with a factor two but that doesn't matter, and the axis of rotation, the direction of the axis of rotation. It tells you it is rotating about a vertical axis. And, in general, if you have a complicated motion some of it might be, you know, there is a translation. And then within that translation there is maybe expansion and rotation and sharing and everything. And the curl will compute how much rotation is taking place.
Cụ thể, curl này mang đến cho bạn vận tốc góc của sự quay, vâng, với hệ số hai nhưng nó không quan trọng, và trục quay, hướng của trục quay. Nó cho bạn biết nó đang quay quanh trục thẳng đứng. Và, nói chung, nếu bạn có một chuyển động phức tạp một trong số đó có thể là, bạn biết, có tịnh tiến. Và thế thì trong chuyển độnh tịnh tiến đó có thể có sự mở rộng và sự quay và hoặc cả hai và tất cả mọi thứ. Và curl sẽ đo sự quay chiếm bao nhiêu phần trong đó.

It will tell you, say that you have a very small solid, I don't know like a ping pong ball in your flow, and it is just going with the flow, it tells you how it is going to start rotating. That is what curl measures. On Thursday we will see Stokes' theorem, which will be the last ingredient before the next exam. And then on Friday we will review stuff.
Nó sẽ cho bạn biết, giả sử rằng bạn có một vật rắn rất nhỏ, tôi không biết là cái gì như một quả bóng bàn trong dòng chảy của bạn, và nó sẽ đi với dòng chảy, nó sẽ cho bạn biết quả bóng sẽ bắt đầu quay như thế nào. Đó là những gì curl đo. Ngày thứ năm chúng ta học định lý Stokes, nó sẽ là chủ đề cuối cùng trước khi thi. Và sau đó vào thứ sáu chúng ta sẽ ôn tập.