MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 29

Định lí phân kì (tiếp): Ứng dụng và chứng minh
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

So, first of all, there is a handout here with some notes on what I'm going to explain today, giving you a bit more details. So, the goals for today is we're going to see two things. One is how to prove the divergence theorem, and the second one is actually what it says physically. So, we're going to see how it relates to partial differential equations that come up naturally in physics such as the diffusion equation, the heat equation, convection equation, and so on.
Vì vậy, trước hết, có một handout với một số chú thích về những gì tôi sẽ giải thích hôm nay, cho bạn thêm một chút chi tiết. Vì vậy, mục tiêu của ngày hôm nay là chúng ta sẽ học hai thứ. Một là cách chứng minh định lý divergence, và hai là ý nghĩa vật lí của nó. Vâng, chúng ta sẽ thấy nó liên quan đến các PTVP đạo hàm riêng xuất hiện một cách tự nhiên trong vật lí như thế nào chẳng hạn như phương trình khuếch tán, phương trình nhiệt, phương trình đối lưu và v.v…….

So that's what these notes are about. If you don't have them yet, then you can just pick them up at the end of class. And the other thing is, well, my office hour tomorrow afternoon is canceled because I won't be around. But, I'm available this afternoon after this class if you want. Otherwise I'll be reachable by e-mail, and all that. OK, so remember we left things with this statement of the divergence theorem. So, the divergence theorem gives us a way to compute the flux of a vector field for a closed surface. OK, it says if I have a closed surface, s, bounding some region, D, and I have a vector field defined in space, so that I can try to compute the flux of my vector field through my surface.
Vì vậy, đó là nội dung của các ghi chú. Nếu bạn chưa có chúng, thì bạn có thể lấy chúng vào cuối buổi học. Và điều còn lại là, vâng, giờ làm việc của tôi vào chiều mai bị hủy bỏ vì tôi bận chút việc. Nhưng, tôi sẽ có mặt vào chiều hôm nay sau buổi học nếu bạn muốn. Nếu không tôi cũng có thể trả lời qua e-mail, và chỉ có bấy nhiêu thông báo thôi. OK, vâng hãy nhớ là chúng ta đang đến phần nội dung của định lí divergence. Vâng, định lý divergence cho chúng ta cách tính thông lượng của một trường vector qua một bề mặt kín. OK, nó nói nếu tôi có một bề mặt kín, s, bao quanh vùng D nào đó, và tôi có trường vectơ xác định trong không gian, thì tôi có thể tính thông lượng của trường vector qua bề mặt.

Double integral of F.dS or F.ndS if you want, and to set this up, of course, I need to use the geometry of the surface depending on what the surface is. We've seen various formulas for how to set up the double integral. But, we've also seen that if it's a closed surface, and if a vector field is defined everywhere inside, then we can actually reduce that to a calculation of the triple integral of the divergence of F inside, OK?
Tích phân kép của F.dS hoặc F.ndS nếu bạn muốn, và để tính cái này, tất nhiên, tôi cần phải căn cứ vào dạng hình học của bề mặt. Chúng ta đã học những cách khác nhau để tính tích phân kép. Tuy nhiên, chúng ta cũng thấy rằng nếu đó là một bề mặt kín, và nếu trường vector được xác định ở khắp mọi nơi bên trong, thì thực sự chúng ta có thể đưa nó về tính tích phân ba lớp của divergence F bên trong, đúng không?

So, concretely, if I use coordinates, let's say that the coordinates of my vector field are, sorry, the components are P, Q, and R dot ndS, then that will become the triple integral of, well, so, divergence is P sub x plus Q sub y plus R sub z. OK, so by the way, how to remember this formula for divergence, and other formulas for other things as well. Let me just tell you quickly about the del notation. So, this guy usually pronounced as del, rather than as pointy triangle going downwards or

something like that, it's a symbolic notation for an operator. So, you're probably going to complain about putting these guys into a vector.
Vì vậy, cụ thể, nếu tôi sử dụng các tọa độ, giả sử rằng các tọa độ của trường vector của tôi là, xin lỗi, các thành phần là P, Q, và R dot ndS, thì nó sẽ trở thành tích phân ba lớp của, vâng, như vậy, divergence là P x cộng Q y cộng R z. OK, do đó, qua đây, làm thế nào để nhớ công thức divergence, và các công thức khác nữa. Hãy để tôi nói nhanh về kí hiệu del. Vâng, thằng này thường được đọc là del, chứ không phải là tam giác nhọn hướng xuống hoặc cái gì khác, đó là một ký hiệu tượng trưng của toán tử. Vâng, có lẽ bạn sẽ than phiền về việc đặt những thằng này vào trong một vector.

But, let's think of partial with respect to x, with respect to y, and with respect to z as the components of some formal vector. Of course, it's not a real vector. These are not like anything. These are just symbols. But, so see for example, the gradient of function, well, if you multiply this vector by scalar, which is a function, then you will get partial, partial x of f, partial, partial y of f, partial, partial z, f, well, that's the gradient.
Nhưng, chúng ta hãy xét đạo hàm riêng theo x, theo y, và theo z như các thành phần của một vector hình thức nào đó. Tất nhiên, nó không phải là một vector thực. Chúng không giống bất kì cái gì. Đây chỉ là các kí hiệu. Nhưng, vâng xét ví dụ, gradient của hàm, vâng, nếu bạn nhân vector này với đại lượng vô hướng, là một hàm, thì bạn sẽ nhận được đạo hàm riêng, đạo hàm riêng của f theo x, đạo hàm riêng của f theo y, theo z, vâng, đó là gradient.

That seems to work. So now, the interesting thing about divergence is I can think of divergence as del dot a vector field. See, if I do the dot product between this guy and my vector field P, Q, R, well, it looks like I will indeed get partial, partial x of P plus partial Q partial y plus partial R partial z. That's the divergence. OK, and of course, similarly, when we have two variables only, x and y, we could have thought

of the same notation, just with a two component vector, partial, partial x, partial, partial y. So, now, this is like of slightly limited usefulness so far. It's going to become very handy pretty soon because we are going to see curl. And, the formula for curl in the plane was kind of complicated. But, if you thought about it in terms of this, it was actually the determinant of del and f. And now, in space, we are actually going to do del cross f. But, I'm getting ahead of things.
Điều đó có vẻ đúng. Vì vậy bây giờ, điều thú vị về divergence là tôi có thể xem divergence như del nhân vô hướng với một trường vector. Xem nào, nếu tôi thực hiện tích vô hướng giữa thằng này và trường vector của tôi P, Q, R, vâng, có vẻ như tôi sẽ nhận được đạo hàm riêng của P theo x cộng đạo hàm riêng của Q theo y cộng đạo hàm riêng của R theo z. Đó là divergence. OK, và dĩ nhiên, tương tự, khi chúng ta chỉ có hai biến, x và y, chúng ta có thể nghĩ đến quy ước tương tự, chỉ với một vector hai thành phần, đạo hàm riêng theo x, đạo hàm riêng theo y. Vâng, lúc này, kí hiệu này có vẻ như kém hữu dụng. Nhưng khi chúng ta học đến curl thì nó rất hữu dụng. Và, công thức cho curl trong mặt phẳng hơi phức tạp. Nhưng, nếu bạn nghĩ về nó theo cái này, nó thực sự là định thức của del và f. Và bây giờ, trong không gian, chúng ta sẽ tính del chéo f. Nhưng, tôi sẽ tiến về phía trước các thứ.

So, let's not do anything with that. Curl will be for next week. Just getting you used to the notation, especially since you might be using it in physics already. So, it might be worth doing. OK, so the other thing I wanted to say is, what does this theorem say physically? How should I think of this statement? So, I think I said that very quickly at the end of last time, but not very carefully.
Vì vậy, chúng ta sẽ không làm bất cứ điều gì với nó. Curl sẽ được xét vào tuần tới. Chỉ để bạn quen với kí hiệu, đặc biệt bởi vì có thể bạn đang dùng nó trong vật lí. Vì vậy, nó đáng làm. OK, vì vậy điều còn lại tôi muốn nói là, ý nghĩa vật lí của định lí này là gì? Tôi nên nghĩ như thế nào về phát biểu này? Vâng, tôi nghĩ rằng tôi đã nói lướt qua vấn đề đó vào lần trước, nhưng chưa kĩ.

So, what's the physical interpretation of a divergence field? So, I want to claim that the divergence of a vector field corresponds to what I'm going to call the source rate, which is somehow the amount of flux generated per unit volume. So, to understand what that means, let's think of what's called an incompressible fluid. OK, so an incompressible fluid is something like water, for example, where a fixed mass of it always occupies the same amount of volume. So, guesses are compressible. Liquids are incompressible, basically. So, if you have an incompressible fluid flow –
Vậy, ý nghĩa vật lí của trường divergence là gì? Vâng, tôi muốn nói rằng divergence của một trường vectơ tương ứng với tốc độ nguồn, nó là lượng thông lượng được tạo ra trên một đơn vị thể tích. Vì vậy, để hiểu ý nghĩa của điều đó, chúng ta hãy xét một chất lỏng không nén được. OK, do đó, một chất lỏng không nén được là thứ gì đó giống như nước, dễ thấy là, mỗi khối lượng xác định sẽ chiếm một thể tích xác định. Vâng, chất khí có thể nén được. Chất lỏng không nén được, về cơ bản là vậy. Vì vậy, nếu bạn có một dòng chất lưu không nén được -

-- well, so, again, what that means is really, given mass occupies always a fixed volume. Then, well, let's say that we have such a fluid with velocity given by our vector field. OK, so we're thinking of F as the velocity and maybe something containing water, a pipe, or something. So, what does the divergence theorem say? It says that if I take a region in space, let's call it D, sorry, D is the inside, and S is the surface around it, well, so if I sum the divergence in D, well, I'm going to get the flux going out through this surface, S. I should have mentioned it earlier. The convention in the divergence theorem is that we orient the surface with a normal vector pointing always outwards.
- vâng, vì vậy, một lần nữa, ý nghĩa của nó là, một khối lượng cho trước luôn luôn chiếm thể tích xác định. Thế thì, vâng, giả sử rằng chúng ta có một chất lỏng như thế với vận tốc được cho bởi trường vector. OK, vì vậy chúng ta xem F như vận tốc và có thể một cái gì đó chứa nước, đường ống, hay cái gì đó. Vâng, nội dung của định lí divergence là gì? Nó nói rằng nếu tôi chọn một vùng trong không gian, chúng ta hãy gọi nó là D, xin lỗi, D ở bên

trong, và S là bề mặt xung quanh nó, vâng, nếu tôi lấy tổng divergence trong D, vâng, tôi sẽ nhận được thông lượng ra khỏi bề mặt này, S. Tôi đã đề cập nó từ trước. Quy ước trong định lý divergence là chúng ta định hướng bề mặt với vector pháp tuyến luôn hướng ra ngoài.

OK, so now, we know what flux means. Remember, we've been describing, flux means how much fluid is passing through this surface. So, that's the amount of fluid that's leaving the region, D, per unit time. And, of course, when I'm saying that, it means I'm counting everything that's going out of D minus everything that's coming into D. That's what the flux measures. So, now, if there is stuff coming into D or going out of D, well, it must come from somewhere. So, one possibility would be that your fluid is actually being compressed or expanded. But, I've said, no, I'm looking at something like water that you cannot squish into smaller volume. So, in that case, the only explanation is that there is something it here that actually is sucking up water or producing more water.
OK, vậy bây giờ, chúng ta biết thông lượng là gì. Hãy nhớ rằng, chúng ta đã mô tả, thông lượng có nghĩa là chất lỏng đi qua bề mặt này nhiều bao nhiêu. Do đó, đó là lượng chất lỏng đang rời khỏi vùng, D, trên đơn vị thời gian. Hay nói cách khác, nó có nghĩa là tôi đang tính mọi thứ ra khỏi D trừ mọi thứ vào trong D. Đó là những gì thông lượng đo. Vì vậy, bây giờ, nếu có thứ gì đó đi vào D hoặc ra khỏi D, vâng, nó phải đến từ một nơi nào đó. Vì vậy, một khả năng sẽ là chất lưu của bạn bị nén hoặc giãn nỡ. Nhưng, tôi đã nói, không, tôi đang xét thứ gì đó giống như nước ở đó bạn không thể làm cho thể tích nhỏ hơn. Vì vậy, trong trường hợp đó, giải thích duy nhất là có cái gì đó ở đây hút nước hoặc tạo ra thêm nước.

And so, integrating the divergence gives you the total amount of sources minus the amount of syncs that are inside this region. So, the divergence itself measures basically the amount of sources or syncs per unit volume in a given place. And now, if you think about it that way, well, it's basically the divergence theorem is just stating something completely obvious about all the matter that is leaving this region must come from somewhere.
Và vì vậy, lấy tích phân divergence cho bạn tổng lượng nguồn trừ lượng hõm bên trong vùng này. Vì vậy, về cơ bản chính divergence đo lượng nguồn hoặc lượng hõm trên một đơn vị thể tích ở một nơi nhất định. Và bây giờ, nếu bạn nghĩ về nó theo cách đó, vâng, về cơ bản định lý divergence đang phát biểu các thứ hoàn toàn hiển nhiên về tất cả các vật chất đang rời khỏi vùng này phải đến từ nơi nào đó.

So, that's basically how we think about it. Now, of course, if you're doing 8.02, then you might actually have seen the divergence theorem already being used for things that are more like force fields, say, electric fields and so on. Well, I'll try to say a few things about that during the last week of classes. But, then this kind of interpretation doesn't quite work. OK, any questions, generally speaking, before we move on to the proof and other applications? Yes?

Vì vậy, về cơ bản đó là cách chúng ta nghĩ về nó. Nếu hiện tại bạn đang học 8,02, thì thực sự bạn đã thấy định lí divergence đã được áp dụng cho các thứ chẳng hạn như các trường lực, các trường điện và v.v… Vâng, chúng ta sẽ xét về các ứng dụng đó trong tuần cuối của khóa học. Tuy nhiên, thế thì loại diễn giải này không hoàn toàn đúng. OK, bất kì câu hỏi, nói chung, trước khi chúng ta chuyển sang các chứng minh và các ứng dụng khác? Xin mời?

Oh, not the gradient. So, yeah, not the gradient. So, yeah, the divergence of F measures the amount of sources or syncs in there. Well, what makes it happen? If you want, in a way, it's this theorem. Or, in another way, if you think about it, try to look at your favorite vector fields and compute their divergence. And, if you take a vector field where maybe everything is rotating, a flow that's just rotating about some axis, then you'll find that its divergence is zero. If you, sorry? No, divergence is not equal to the gradient. Sorry, there's a dot here that maybe is not very big, but it's very important.
Oh, không phải gradient. Vâng, đúng rồi, không phải gradient. Vì vậy, đúng, divergen của F đo lượng nguồn hoặc hõm ở đó. Vâng, điều gì làm nó xảy ra? Nếu bạn muốn, theo một cách, đó là định lý này. Hoặc, theo cách khác, nếu bạn nghĩ về nó, hãy thử xét trường vector yêu thích của bạn và tính divergence của chúng. Và, nếu bạn chọn một trường vector ở đó mọi thứ đang quay, một dòng chảy đó chỉ quay quanh một trục nào đó, thì bạn sẽ thấy rằng divergence của nó bằng không. Nếu bạn, xin lỗi? Không, divergence không bằng gradient. Xin lỗi, có một dấu chấm không lớn lắm ở đây, nhưng nó rất quan trọng.

OK, so you take the divergence of a vector field. Well, you take the gradient of a function. So, if the gradient of a function is a vector, the divergence of a vector field is a function. So, somehow these guys go back and forth between. So, I should have said, with new notations comes new responsibility. I mean, now that we have this nice, nifty notation that will let us do gradient divergence and later curl in a unified way, if you choose this notation you have to be really, really careful what you put after it because otherwise it's easy to get completely confused.
OK, vì vậy bạn lấy divergence của một trường vector. Vâng, bạn lấy gradient của một hàm. Vâng, nếu gradient của một hàm là một vectơ, divergence của một trường vector là một hàm. Vì vậy, bằng cách nào đó những thằng này đi qua lại giữa. Vâng, tôi cần phải nói, ký hiệu mới mang đến nhiệm vụ mới. Ý tôi là, bây giờ chúng ta có kí hiệu thuận tiện, đẹp này sẽ cho phép chúng ta tính gradient divergence và sau đó là curl theo một cách thống nhất, nếu bạn chọn ký hiệu này bạn phải thực sự, thực sự cẩn thận những gì bạn đặt sau nó bởi vì nếu không rất dễ bị nhầm lẫn.

OK, so divergence and gradients are completely different things. The only thing they have in common is that both are what's called a first order differential operator. That means it involves the first partial derivatives of whatever you put into it. But, one of them goes from functions to vectors. That's gradient. The other one goes from vectors to functions. That's divergence. And, curl later will go from vectors to vectors.
OK, do đó divergence và gradient là những thứ hoàn toàn khác nhau. Điểm duy nhất mà chúng giống nhau là cả hai đều được gọi là toán tử vi phân bậc nhất. Điều đó có nghĩa cả hai đều liên quan đến đạo hàm riêng bậc nhất. Tuy nhiên, một trong số chúng đi từ hàm đến các vector. Đó là gradient. Cái kia đi từ vector đến hàm. Đó là divergence. Và, curl sau này sẽ đi từ vector đến vector.

But, that will be later. Let's see, more questions? No? OK, so let's see, so how are we going to actually prove this theorem? Well, if you remember how we prove Green's theorem a while ago, the answer is we're going to do it exactly the same way. So, if you don't remember, then I'm going to explain. OK, so the first thing we need to do is actually a simplification. So, instead of proving the divergence theorem, namely, the equality up there, I'm going to actually prove something easier. I'm going to prove that the flux of a vector field that has only a z component is actually equal to

the triple integral of, well, the divergence of this is just R sub z dV.
Nhưng, đó là sau này. Xem nào, có câu hỏi không? Không có? OK, vì vậy xem nào, vậy chúng ta sẽ chứng minh định lí này như thế nào? Vâng, nếu bạn nhớ cách chúng ta chứng minh định lí Green cách đây không lâu, câu trả lời là chúng ta sẽ làm nó y như cách đó. Vì vậy, nếu bạn không nhớ, thì tôi sẽ giải thích. OK, vì vậy điều đầu tiên chúng ta cần làm là đơn giản hóa. Vì vậy, thay vì chứng minh định lý divergence, cụ thể là, sự tương đương trên đó, tôi sẽ chứng minh cái gì đó dễ hơn. Tôi sẽ chứng minh cho thông lượng của trường vector chỉ có một thành phần z bằng tích phân ba lớp của, vâng, divergence của cái này chỉ là R z dV.

OK, now, how do I go back to the general case? Well, I will just prove the same thing for a vector field that has only an x component or only a y component. And then, I will add these things together. So, if you think carefully about what happens when you evaluate this, you will have some formula for ndS, and when you do the dot product, you'll end up with the sum, P times something plus Q times something plus R times something. And basically, we are just dealing with the last term, R times something, and showing that it's equal to what it should be. And then, we the three such terms together. We'll get the general case. OK, so then we get the general case by summing one such identity for each component.
OK, bây giờ, tôi quay lại trường hợp tổng quát như thế nào? Vâng, tôi sẽ chứng minh tương tự cho một trường vector chỉ có thành phần x hoặc chỉ có thành phần y. Và sau đó, tôi sẽ cộng những thứ này với nhau. Vì vậy, nếu bạn suy nghĩ cẩn thận về những gì sẽ xảy ra khi bạn tính cái này, bạn sẽ có công thức nào đó cho ndS, và khi bạn tính tích vô hướng, cuối cùng bạn sẽ được tổng, P nhân cái gì đó cộng Q nhân cái gì đó cộng R nhân cái gì đó. Và về cơ bản, chúng ta chỉ xét số hạng cuối cùng, R nhân cái gì đó, và chứng tỏ rằng nó sẽ bằng những gì nó nên bằng. Và sau đó, chúng ta cộng ba số hạng như thế với nhau. Chúng ta sẽ nhận được trường hợp tổng quát. Vâng, do đó chúng ta nhận được trường hợp tổng quát bằng cách cộng một đồng nhất thức như thế đối với mỗi thành phần.

I should say three such identities, one for each component, whatever. Now, let's make a second simplification because I'm still not feeling confident I can prove this right away for any surface. I'm going to do it first or what's called a vertically simple region. OK, so vertically simple means it will be something which I can setup an integral over the z variable first easily. So, it's something that has a bottom face, and a top face, and then some vertical sides.

À , không, phải là cộng từng thành phần của ba đồng nhất thức với nhau. Bây giờ, chúng ta hãy đơn giản hóa lần hai bởi vì tôi vẫn còn chưa có cảm giác an tâm tôi có thể chứng minh điều này ngay lập tức cho bất cứ bề mặt nào. Tôi sẽ làm cho vùng đơn thẳng đứng trước. OK, vâng đơn thẳng đứng có nghĩa là nó sẽ là cái gì đó mà tôi có thể tính tích phân theo biến z trước một cách dễ dàng. Vì vậy, nó là cái gì có một mặt đáy,và một mặt trên, và một số mặt bên thẳng đứng.

OK, so let's say first what happens if the given region, D, is vertically simple. So, vertically simple means it looks like this. It has top. It has a bottom. And, it has some vertical sides. So, if you want, if I look at it from above, it projects to some region in the xy plane. Let's call that R. And, it lives between the top face and the bottom face. Let's say the top face is z equals z2 of (x, y). Let's say the bottom face is z equals z1(x, y).
OK, vâng hãy xem những gì xảy ra nếu vùng D cho trước, là đơn thẳng đứng. Vì vậy, đơn thẳng đứng có nghĩa là nó có dạng thế này. Nó có mặt trên. Nó có mặt đáy. Và, nó có một số mặt bên thẳng đứng. Vì vậy, nếu bạn muốn, nếu tôi nhìn nó từ trên, nó chiếu đến vùng nào đó trong mặt phẳng xy. Hãy gọi đó là R. Và, nó nằm giữa mặt trên và mặt đáy. Giả sử rằng mặt trên là z bằng z2 của (x, y). Giả sử rằng mặt đáy là z bằng z1 (x, y).

OK, and I don't need to know actual formulas. I'm just going to work with these and prove things independently of what the formulas will be for these functions. OK, so anyway, a vertically simple region is something that lives above a part of the xy plane, and is between two graphs of two functions. So, let's see what we can do in that case. So, the right-hand side of this equality, so that's the triple integral, let's start computing it.
OK, và tôi không cần biết công thức thực tế. Tôi chỉ sẽ làm việc với những cái này và chứng minh các thứ một cách độc lập với các công thức của những hàm này. OK, do đó, dù sao đi nữa, vùng đơn thẳng đứng là cái gì đó nằm trên một phần của mặt phẳng xy, và giữa hai đồ thị của hai hàm. Vì vậy, hãy xem chúng ta có thể làm gì trong trường hợp đó. Vì vậy, vế phải của đẳng thức này, vâng đó là tích phân ba lớp, chúng ta hãy bắt đầu tính nó.

OK, so of course we will not be able to get a number out of it because we don't know, actually, formulas for anything. But at least we can start simplifying because the way this region looks like, I should say this is D, tells me that I can start setting up the triple integral at least in the order where I integrate first over z. OK, so I can actually do it as a triple integral with Rz dz dxdy or dydx, doesn't matter. So, what are the bounds on z? See, this is actually good practice to remember how we set up triple integrals. So, remember, when we did it first over z, we start by fixing a point, x and y, and for that value of x and y, we look at a small vertical slice and see from where to where we have to go.
OK, vì vậy tất nhiên chúng ta sẽ không thể nhận được số từ nó bởi vì chúng ta không biết, công thức của bất cứ cái gì. Nhưng ít nhất chúng ta có thể bắt đầu đơn giản hóa bởi vì vùng này có dạng thế này, tôi sẽ gọi đây là D, cho tôi biết rằng tôi có thể tính tích phân ba lớp ít nhất là theo z trước. OK, vì vậy tôi cói thể tính nó như tích phân ba lớp với Rz dz dxdy hoặc dydx, không quan trọng. Vâng, cận của z là gì? Thấy không, đây thực sự là bài tập tốt để nhớ cách tính tích phân ba lớp. Vì vậy, hãy nhớ, khi chúng ta làm nó với z trước, chúng ta bắt đầu bằng cách cố định một điểm, x và y, và đối với giá trị đó của x và y, chúng ta xét một mặt cắt thẳng đứng nhỏ và xem chúng ta phải đi từ đâu đến đâu.

Well, we start at z equals whatever the value is at the bottom, so, z1 of x and y. And, we go up to the top face, z2 of x and y. Now, for x and y, I'm not going to actually set up bounds because I've already called R the quantity that I'm integrating. So let me change this to, let's say, U or something like that. If you already have an R, I mean, there's not much risk for confusion, but still.
Vâng, chúng ta bắt đầu tại z bằng bất cứ giá trị nào ở phía dưới, vâng, z1 của x và y. Và, chúng ta đi đến mặt trên, z2 của x và y. Bây giờ, đối với x và y, tôi sẽ không thiết lập các cận bởi vì tôi đã gọi R là đại lượng mà tôi sẽ lấy tích phân. Vì vậy, hãy để tôi thay đổi cái này thành, giả sử, U hoặc cái gì đó tương tự thế. Nếu bạn đã có một R, ý tôi là, không có nhiều nguy cơ nhầm lẫn, nhưng vẫn còn.

OK, so we're going to call U the shadow of my region instead. So, now I want to integrate over all values of x and y that are in the shadow of my region. That means it's a double integral over this region, U, which I haven't described to you. So, I can't actually set up bounds for x and y. But, I'm going to just leave it like this. OK, now

you see, if you look at how you would start evaluating this, well, the inner integral certainly is not scary because you're integrating the derivative of R with respect to z, integrating that with respect to z. So, you should get R back. OK, so triple integral over D of Rz dV becomes, well, we'll have a double integral over U of, so, the inner integral becomes R at the point on the top.
OK, vì vậy chúng ta sẽ gọi U là hình chiếu của vùng của tôi. Vì vậy, bây giờ tôi muốn lấy tích phân trên tất cả các giá trị của x và y trong hình chiếu của vùng của tôi. Điều đó có nghĩa là nó là tích phân kép trên vùng này, U, mà tôi đã không mô tả cho bạn. Vì vậy, tôi không thể thiết lập các cận cho x và y. Nhưng, tôi sẽ chỉ để lại nó như thế này. OK, bây giờ bạn thấy, nếu bạn nhìn vào cách bạn bắt đầu tính cái này, vâng, tích phân bên trong tất nhiên không đáng sợ bởi vì bạn đang lấy tích phân của đạo hàm của R theo z, tích phân cái đó theo z. Vì vậy, bạn lại nhận được R. Vâng, do đó, tích phân ba lớp của Rz dV trên D trở thành, vâng, chúng ta sẽ có tích phân kép trên U của, vâng, tích phân bên trong trở thành R tại điểm nằm ở mặt trên.

So, that means, remember, R is a function of x, y, and z. And, in fact, I will plug into it the value of z at the top, so, z of xy minus the value of R at the point on the bottom, x, y, z1 of x, y. OK, any questions about this? No? Is it looking vaguely believable? Yeah? OK. So, now, let's compute the other side because here we are stuck. We won't be able to do anything else. So, let's look at the flux integral. OK, we have to look at the flux of this vector field through the entire surface, S, which is the whole boundary of D.
Vì vậy, điều đó có nghĩa là, hãy nhớ rằng, R là một hàm của x, y, và z. Và, thực sự, tôi sẽ thế giá trị của z tại mặt trên vào trong nó, vâng, z của xy trừ giá trị của R tại điểm ở đáy, x, y, z1 của x, y. Vâng, có câu hỏi nào về điều này không? Không có à? Có vẻ các bạn còn mơ hồ phải không? Vâng? OK. Vì vậy, bây giờ, hãy tính mặt khác bởi vì chúng ta bị mắc kẹt ở đây rồi. Chúng ta không thể làm bất cứ điều gì khác. Vì vậy, hãy xét tích phân thông lượng. OK, chúng ta phải xét thông lượng của trường vector này qua toàn bộ bề mặt , S, nó là toàn bộ biên của D.

So, that consists of a lot of pieces, namely the top, bottom, and the sides. OK, so the other side -- So, let me just remind you, S is bottom plus top plus side of this vector field, dot ndS equals, OK, so what do we have? So first, we have to look at the bottom. No, let's start with the top actually. Sorry. OK, so let's start with the top. So, just remind you, let's do all of them. So, let's look at the top first. So, we need to set

up the flux integral for a vector field dot ndS. We need to know what ndS is. Well, fortunately for us, we know that the top face is going to be the graph of some function of x and y. So, we've seen a formula for ndS in this kind of situation, OK? We have seen that ndS, sorry, so, just to remind you this is the graph of a function z equals z2 of x, y.
Vì vậy, nó bao gồm rất nhiều mảnh, cụ thể là trên, dưới, và các mặt bên. OK, do đó mặt còn lại - Vâng, hãy để tôi nhắc bạn, S là đáy cộng mạt trên cộng mặt bên của trường vector này, dot ndS bằng, OK, chúng ta có gì? Vì vậy trước hết, chúng ta phải xét đáy. Không, chúng ta hãy bắt đầu với đỉnh. Xin lỗi. OK, vì vậy hãy bắt đầu với mặt trên. Vâng, chỉ là nhắc nhở bạn, chúng ta hãy làm tất cả chúng. Vâng, hãy xét mặt trên trước. Vâng, chúng ta cần phải tính tích phân thông lượng cho trường vector dot ndS. Chúng ta cần biết ndS là gì. Vâng, may mắn cho chúng ta, chúng ta biết rằng mặt trên sẽ là đồ thị của hàm x và y nào đó. Vâng, chúng ta đã thấy công thức của ndS trong trường hợp như thế này, đúng không? Chúng ta đã thấy rằng ndS, xin lỗi, vâng, chỉ để nhắc nhở bạn đây là đồ thị của hàm z bằng z2 của x, y.

So, we've seen ndS for that is negative partial derivative of this function with respect to x, negative partial z2 with respect to y, one, dxdy. OK, and, well, we can't compute these guys, but it's not a big deal because if we do the dot product with <0, 0, R> dot ndS, that will give us, well, if you dot this with zero, zero, R, these terms go away. You just have R dxdy. So, that means that the double integral for flux through the top of R vector field dot ndS becomes double integral of the top of R dxdy. Now, how do we evaluate that, actually? Well, so R is a function of x, y, z. But we said, we have only two variables that we're going to use. We're going to use x and y. We're going to get rid of z. How do we get rid of z? Well, if we are on the top surface, z is given by this formula, z2 of x, y. So, I plug z equals z2 of x, y into the formula for R, whatever it may be.
Vâng, chúng ta đã thấy ndS bằng trừ đạo hàm riêng của hàm này theo x, trừ đạo hàm riêng của z2 theo y, một, dxdy. OK, và, vâng, chúng ta không thể tính những thằng này, nhưng nó không phải là một vấn đề lớn bởi vì nếu chúng ta lấy tích vô hướng với <0,0, R> dot ndS, điều đó sẽ cho chúng ta, vâng, nếu bạn lấy tích vô hướng cái này với không, không, R, những số hạng này biến mất. Bạn chỉ có R dxdy. Vì vậy, điều đó có nghĩa là tích phân hai lớp của thông lượng qua mặt trên của trường vector R dot ndS sẽ trở thành tích phân kép của mặt trên của Rdxdy. Bây giờ, chúng ta tính nó như thế nào? Vâng, R là một hàm của x, y, z. Nhưng chúng ta đã nói, chúng ta chỉ có hai biến mà chúng ta sẽ dùng. Chúng ta sẽ sử dụng x và y. Chúng ta sẽ bỏ z. Chúng ta bỏ z như thế nào? Vâng, nếu chúng ta ở mặt trên, z được cho bởi công thức này, z2 của x, y. Vì vậy, tôi thế z bằng z2 của x, y vào công thức của R, nó có thể là bất cứ thứ gì.

Then, I integrate dxdy. And, what's the range for x and y? Well, my surface sits exactly above this region U in the xy plane. So, it's double integral over U, OK? Any questions about how I set up this flux integral? No? OK, let me close the door, actually. OK, so we've got one of the two terms that we had over there. Let's try to get the others. [LAUGHTER] No comment. OK, so, we need to look, also, at the other parts of our surface for the flux integral. So, the bottom, well, it will work pretty much the same way, right, because it's the graph of a function, z equals z1 of x, y. So, we should be able to get ndS using the same method, negative partial with respect to x, negative partial with respect to y, one dxdy.
Sau đó, tôi lấy tích phân dxdy. Và, khoảng giá trị của x và y là gì? Vâng, bề mặt của tôi nằm ngay trên vùng U này trong mặt phẳng xy. Vì vậy, nó là tích phân kép trên U, đúng không? Có ai thắc mắc gì về cách thiết lập tích phân thông lượng này không? Không có? OK, hãy để tôi đóng cửa. OK, vì vậy chúng ta có một trong hai số hạng mà chúng ta đã có trên đó. Hãy thử tính thêm những cái còn lại. Không có nhận xét. OK, vì vậy, chúng ta cũng cần xét, tại các phần khác của bề mặt của chúng ta cho tích phân thông lượng. Vì vậy, mặt đáy, vâng, quy tắc của nó khá tương tự, đúng, bởi vì nó là đồ thị của một hàm, z bằng z1 của x, y.Vì vậy, chúng ta có thể nhận được ndS bằng cách sử dụng cùng một phương pháp, trừ đạo hàm riêng

theo x, trừ đạo hàm riêng theo y, một dxdy.

Now, there's a small catch. OK, we have to think of it carefully about orientations. So, remember, when we set up the divergence theorem, we need the normal vectors to point out of our region, which means that on the top surface, we want n pointing up. But, on the bottom face, we want n pointing down. So, in fact, we shouldn't use this formula here because that one corresponds to the other orientation. Well, we could use it and then subtract, but I was just going to say that ndS is actually the opposite of this. So, I'm going to switch all my signs. OK, that's the other side of the formula when you orient your graph with n pointing downwards.
Bây giờ, có một cái bẫy nhỏ. OK, chúng ta phải xem xét cẩn thận về sự định hướng của nó. Vì vậy, hãy nhớ, khi chúng ta thiết lập định lý divergence, chúng ta cần các vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài vùng, có nghĩa là trên bề mặt trên, chúng ta muốn n hướng lên. Tuy nhiên, ở mặt đáy, chúng ta muốn n hướng xuống. Vì vậy, trên thực tế, chúng ta không nên sử dụng công thức này ở đây vì cái đó tương ứng với một sự định hướng khác. Vâng, chúng ta có thể sử dụng nó và sau đó trừ, nhưng tôi sẽ nói rằng ndS thực sự ngược với cái này. Vì vậy, tôi sẽ đổi tất cả các dấu. OK, đó là vế còn lại của công thức khi bạn định hướng đồ thị của bạn với n hướng xuống.

Now, if I do things the same way as before, I will get that <0, 0, R> dot ndS will be negative R dxdy. And so, when I do the double integral over the bottom, I'm going to get the double integral over the bottom of negative R dxdy, which, if I try to evaluate that, well, I actually will have to integrate. Sorry, first I'll have to substitute the value of z. The value of z that I will want to plug into R will be given by, now, z1 of x, y. And, the bounds of integration will be given, again, by the shadow of our surface, which is, again, this guy, U. OK, so we seem to be all set, except we are still missing one part of our surface, S, because we also need to look at the sides.
Bây giờ, nếu tôi làm các thứ theo cách tương tự như trước, tôi sẽ được <0, 0, R> dot ndS sẽ bằng trừ R dxdy. Và vì vậy, khi tôi tính tích phân kép trên mặt đáy, tôi sẽ nhận được tích phân kép của trừ R dxdy trên mặt đáy, trong đó, nếu tôi thử tính cái đó, vâng, tôi thực sự phải tính tích phân. Xin lỗi, đầu tiên tôi sẽ phải thế giá trị của z. Giá trị của z mà tôi muốn thế vào R sẽ được cho bởi, lúc này là, z1 của x, y. Và, các cận của tích phân lại sẽ được cho bởi, hình chiếu của bề mặt của chúng ta, nó lại là, thằng này, U. OK, vì vậy chúng ta đã thấy tất cả tất cả các cách thiết lập, ngoại trừ chúng ta vẫn còn thiếu một phần của bề mặt của chúng ta, S, bởi vì chúng ta cũng cần phải xét các mặt bên.

Well, what about the sides? Well, our vector field, <0, 0, R>, is actually vertical. It's parallel to the z axis. OK, so my vector field does something like this everywhere. And, why that makes it very interesting on the top and bottom, that means that on the sides, really not much is going on. No matter is passing through the vertical sides. So, the side -- The sides are vertical. So, <0, 0, R> is tangent to the side, and therefore, the flux through the sides is just going to be zero.

Vâng, thế còn các mặt bên thì sao? Vâng, trường véc tơ của chúng ta, 0 <, 0, R>, thực sự là thẳng đứng. Nó song song với trục z. OK, do đó trường véc tơ của tôi làm cái gì đó giống như thế này ở khắp mọi nơi. Và, đó là nguyên nhân làm nó lí thú ở mặt trên và mặt đáy, điều đó có nghĩa là ở các mặt bên, thực sự không có gì xảy ra. Không có vật chất đi qua các mặt bên thẳng đứng. Vì vậy, mặt bên - Các mặt bên thẳng đứng. Vì vậy, 0 <, 0, R> là tiếp xúc với mặt bên, và do đó, thông lượng qua các mặt bên đúng bằng không.

OK, no calculation needed. That's because, of course, that's the reason why a simplified first things so that my vector field would only have a z component, well, not just that but that's the main place where it becomes very useful. So, now, if I compare my double integral and, sorry, my triple integral and my flux integral, I get that they are, indeed, the same. Well, that's the statement of the theorem we are trying to prove. I shouldn't erase it, OK? [LAUGHTER]
OK, không có tính toán cần thiết. Đó là bởi vì, tất nhiên, đó là lý do tại sao các thứ được đơn giản hóa trước hết để cho trường vector của tôi chỉ có một thành phần z, vâng, không chỉ điều đó mà đó là nơi chủ yếu mà nó trở thành hữu dụng. Vì vậy, bây giờ, nếu tôi so sánh tích phân kép của tôi và, xin lỗi, tích phân ba lớp của tôi và tích phân thông lượng của tôi, tôi nhận được chúng, thực sự, như nhau. Vâng, đó là phát biểu của định lý mà chúng ta cố gắng chứng minh. Tôi không nên xóa nó, đúng không?

So, just to recap, we've got a formula for the triple integral of R sub z dV. It's up there at the very top. And, we got formulas for the flux through the top and the bottom, and the sides. And, when you add them together, you get indeed the same formula, top plus bottom -- -- plus sides of, OK, and so we have, actually, completed the proof for this part. Now, well, that's only for a vertically simple region, OK? So, if D is not vertically simple, what do we do? Well, we cut it into vertically simple pieces.
Vâng, để tóm tắt, chúng ta có công thức cho tích phân ba lớp của R z dV. Nó ở trên đó rất cao. Và, chúng ta có thông lượng qua mặt trên và mặt đáy, và các mặt bên. Và, khi bạn cộng chúng với nhau, bạn sẽ nhận được cùng một công thức, trên cộng đáy - - cộng các mặt bên của, OK, và vì thế chúng ta có, thực sự, chứng minh hoàn thành phần này. Bây giờ, vâng, đó chỉ là vùng đơn thẳng đứng, OK? Vâng, nếu D không phải đơn thẳng đứng, chúng ta làm gì? Vâng, chúng ta cắt nó thành những phần đơn thẳng đúng.

OK so, concretely, I wanted to integrate over a solid doughnut. Then, that's not vertically simple because here in the middle, I have not only does top in this bottom, but I have this middle face. So, the way I would cut my doughnut would be probably I would slice it not in the way that you'd usually slice the doughnut or a bagel, but at it's probably more spectacular if you think that it's a bagel. Then, a mathematician's way of slicing it is like this into five pieces, OK?
OK như vậy, cụ thể, tôi muốn tính tích phân trên một cái bánh rán. Thế thì, nó không phải là đơn thẳng đứng bởi vì ở đây ở giữa, tôi đã không chỉ làm đỉnh ở dưới này, mà tôi có mặt giữa này. Vì vậy, có lẽ tôi sẽ cắt bánh rán của tôi không giống như cách bạn thường cắt bánh rán hoặc bánh mì Bagel, nhưng ở đây có thể ngoạn mục hơn nếu bạn nghĩ đó là một Bagel. Thế thì, cách cắt của các nhà toán học là cắt nó thành năm phần, đúng không?

And, that's not very convenient for eating, but that's convenient for integrating over it because now each of these pieces has a well-defined top and bottom face, and of course you've introduced some vertical sides for two reasons. One is that we've said the flux through them is zero anyway. So, who cares? Why bother? But, also, if you sum the flux through the surface of each little piece, well, you will see that you will be integrating twice over each of these vertical cuts.
Và, như thế không thuận tiện để ăn, nhưng sẽ thuận tiện để lấy tích phân trên nó bởi vì mỗi phần này có mặt trên và mặt đáy dễ xác định, và tất nhiên bạn đã đưa vào một số mặt bên vì hai lí do. Một là chúng ta đã nói rằng thông lượng qua chúng bằng không. Vì vậy, ai quan tâm? Tại sao quan tâm? Nhưng, tương tự, nếu bạn tính tổng thông lượng qua bề mặt của mỗi mảnh nhỏ, vâng, bạn sẽ thấy rằng bạn sẽ lấy tích phân hai lần trên mỗi mặt cắt thẳng đứng này.

Once, when you do this piece, you will be taking the flux through this red guy with normal vector pointing to the right, and once, when you take this middle little piece, you will be taking the flux through that cut surface again, but now with normal vector pointing the other way around. So, in fact, you'll be summing the flux through these guys twice with opposite orientations. They cancel out. Well, and again, because of what you are doing actually, the integral was just zero anyway. So, it

didn't matter. But, even if it hadn't simplified, that would do it for us. OK, so that's how we do it with the general region. And then, as I said at the beginning, when we can do it for a vector field that has only a z component, well, we can also do it for a vector field that has only an x or only a y component. And then, we sum together and we get the general case.
Một lần, khi bạn xét mảnh này, bạn sẽ lấy thông lượng qua thẳng đỏ này với vector pháp tuyến hướng sang phải, và một lần, khi bạn thực hiện trên mảnh nhỏ ở giữa này, bạn sẽ lấy thông lượng qua bề mặt cắt đó một lần nữa, nhưng bây giờ với vector pháp tuyến hướng theo cách khác. Vì vậy, trên thực tế, bạn sẽ lấy tổng thông lượng qua những thẳng này hai lần theo hướng ngược nhau. Chúng triệt tiêu nhau. Vâng, và một lần nữa, vì những gì bạn đang làm, dù sao thì tích phân cũng bằng không. Vì vậy, nó không quan trọng. Nhưng, cho dù nó không đơn giản hóa, điều đó sẽ làm nó cho chúng ta. OK, vậy đó cách chúng ta làm nó trong vùng tổng quát. Và thế thì, như tôi đã nói lúc đầu, chúng ta thực tính cho một trường vector chỉ có một thành phần z, vâng, chúng ta cũng có thể làm nó cho trường vector chỉ có thành phần x hoặc chỉ có thành phần y. Và sau đó, chúng ta lấy tổng và chúng ta nhận được trường hợp tổng quát.

So, that's the end of the proof. OK, so you see, the idea is really the same as for Green's theorem. Yes? Oh, there's only four pieces, thank you. Yes, there's three kinds of mathematicians: those who know how to count, and those who don't. Well, OK. So, OK, now I hope that you can see already the interest of this theorem for the divergence theorem for computing flux integrals just for the sake of computing flux integrals like might happen on the problem set or on the next test. But let me tell you also why it's important physically to understand equations that had been observed empirically well before they were actually understood in terms of how things go. So, let's look at something called the diffusion equation. So, let me explain to you what it does.
Vì vậy, đến đây kết thúc chứng minh. OK, vì vậy bạn thấy, ý tưởng thực sự giống như định lý Green. Xin mời? Oh, đó chỉ là bốn mảnh, cảm ơn bạn. Vâng, có ba loại nhà toán học: một loại biết cách tính và một loại không biết. Vâng, OK. Vì vậy, OK, bây giờ tôi hy vọng rằng bạn có thể thấy được sự quan tâm của định lý này đối với định lý divergence để tính tích phân thông lượng chỉ cho mục đích tính tích phân thông lượng giống như trên các xấp bài tập hoặc trên bài kiểm tra tiếp theo. Nhưng hãy để tôi nói cho bạn biết tại sao về mặt vật lí việc hiểu các phương trình đã được quan sát trong thực nghiệm là quan trọng trước khi chúng ta thực sự hiểu về khía cạnh toán học của chúng. Vậy, hãy xét phương trình khuếch tán. Vâng, hãy để tôi giải thích cho bạn nó làm gì.

So, the diffusion equation is something that governs, well, what's called diffusion. Diffusion is when you have a fluid in which you are introducing some substance, and you want to figure out how that thing is going to spread out, the technical term is diffuse, into the ambient fluid. So, for example, that governs the motion of, say, smoke in the air, or if you put dye in the solution or things like that.

Vâng, phương trình khuếch tán điều khiển, vâng, quá trình khuếch tán. Khuếch tán là khi bạn có một chất lưu rồi bạn đưa vào chất nào đó vào trong nó, và bạn muốn tìm ra chất đó lan rộng ra như thế nào, thuật ngữ kĩ thuật là khuếch tán, vào trong chất lưu xung quanh. Vì vậy, ví dụ, nó điều khiển chuyển động của, chẳng hạn như, khói trong không khí, hoặc nếu bạn đổ thuốc nhuộm vào trong dung dịch hay cái gì tương tự thế.

That will tell you, say that you drop some ink into a glass of water. Well, you can imagine that obviously it will get diluted into there. And, that equation will tell you how exactly over time this thing is going to spread out and start filling the entire glass. So, what's the equation? Well, we need, first, to know what the unknown will be. So, it's a partial differential equation, OK? So the unknown is a function, and the equation will relate the partial derivatives of that function to each other. So, u, the unknown, will be the concentration at a given point. And, of course, that depends on the point where you are. So, that depends on x, y, z, the location where you are.

Điều đó sẽ cho bạn biết, giả sử rằng bạn nhỏ một ít mực vào trong một ly nước. Vâng, bạn có thể tưởng tượng rằng tất nhiên nó ngày càng bị loãng trong đó. Và, phương trình đó sẽ cho bạn biết chính xác cái này sẽ lan ra và bắt đầu làm đầy toàn bộ li theo thời gian như thế nào. Vậy, phương trình là gì? Vâng, chúng ta cần, đầu tiên, biết biến là gì. Vâng, nó là PTVP đạo hàm riêng, OK chứ? Vì vậy biến là một hàm, và phương trình sẽ liên quan đến đạo hàm riêng của hàm đó với nhau. Vì vậy, u, biến, sẽ là mật độ tại điểm nào đó. Và, tất nhiên, nó phụ thuộc vào điểm bạn xét. Tức là phụ thuộc vào vị trí x, y, z bạng xét.

But, since the goal is also to understand how things spread over time, it should also depend on time. Otherwise, we're not going to get very far. And, in fact, what the equation will give us is the derivative of u with respect to t. It will tell us how the concentration at a given point varies over time in terms of how the concentration varied in space. So, it will relate partial u partial t to partial derivatives with respect to x, y, and z.

Nhưng, vì mục tiêu còn là cần biết các thứ lan ra theo thời gian như thế nào, nó cũng sẽ phụ thuộc vào thời gian. Nếu không, chúng ta sẽ không nhận được gì có giá trị. Và, trên thực tế, phương trình sẽ cho chúng ta đạo hàm của u theo t. Nó sẽ cho chúng ta biết mật độ thay đổi theo thời gian và theo vị trí như thế nào. Vì vậy, nó sẽ thiết lập mối quan hệ giữa đạo hàm riêng của u theo t và đạo hàm riêng đối với x, y, và z.

[APPLAUSE] OK, [LAUGHTER] so what's the equation? The equation is partial u partial t equals some constant. Let me call it constant k times something I will call del squared u, which is also called the Laplacian of u, and what is that? Well, that means, OK, so just to scare you, del squared is this, which means it's the divergence of gradient u that we've used this notation for gradient. OK, so if you actually expand it in terms of variables, that becomes partial u over partial x squared plus partial squared u over partial y squared plus partial squared u over partial z squared. OK, so the equation is this equals that.

Vâng, vì vậy phương trình là gì? Phương trình là đạo hàm riêng của u theo t bằng hằng số nào đó. Hãy để tôi gọi nó là hằng số k nhân cái gì đó mà tôi sẽ gọi là del bình u, nó cũng được gọi là Laplace u, và nó là gì? Vâng, điều đó có nghĩa là, OK, vì vậy chỉ để hù bạn, del bình là cái này, có nghĩa là nó là divergence của gradient u mà chúng ta đã dùng kí hiệu này cho gradient. OK, vậy nếu bạn thực sự khai triển nó theo các biến, nó trở thành đạo hàm riêng của u theo x bình cộng đạo hàm riêng của u theo y bình cộng đạo hàm riêng của u bình theo z bình. OK, do đó phương trình sẽ như thế này.

OK, so that's a weird looking equation. And, I'm going to have to explain to you, where does it come from? OK, but before I do that, well, let me point out actually that the equation is not just the diffusion equation. It's also known as the heat equation. And, that's because exactly the same equation governs how temperature changes over time when you have, again, so, sorry I should have been actually more

careful.
OK, vì vậy đó là một phương trình trông có vẻ lạ. Và, tôi sẽ phải giải thích cho bạn, nó đến từ đâu? OK, nhưng trước khi tôi làm điều đó, vâng, bạn cần biết là phương trình này không chỉ chi phối quá trình khuếch tán. Quá trình truyền nhiệt cũng tuân theo phương trình này. Tức là, phương trình có dạng tương tự chi phối quá trình thay đổi nhiệt độ theo thời gian, vâng, xin lỗi tôi cần phải cẩn thận hơn.

I should have said this is in air that's not moving, OK? OK, and same thing with the solution. If you drop some ink into your glass of water, well, if you start stirring, obviously it will mix much faster than if you don't do anything. OK, so that's the case where we don't actually, the fluid is not moving. And, the heat equation now does the same, but for temperature in a fluid that's at rest, that's not moving. It tells you how the heat goes from the warmest parts to the coldest parts, and eventually temperatures should somehow even out. So, in the heat equation, that would just be, this u would just measure the temperature for temperature of your fluid at a given point.
Tôi đã nói đây là không khí không chuyển động, OK chứ? OK, và nghiệm cũng tương tự. Nếu bạn nhỏ một ít mực vào trong ly nước, vâng, nếu bạn bắt đầu khuấy, rõ ràng nó sẽ hòa hợp nhanh hơn nhiều so với khi bạn không làm gì. OK, do đó, đó là trường hợp chúng ta không thực sự, chất lưu không chuyển động. Và, phương trình nhiệt bây giờ làm tương tự, nhưng đối với nhiệt độ trong một chất lưu đứng yên, nó không chuyển động. Nó cho chúng ta biết nhiệt đi từ các phần ấm nhất đến phần lạnh nhất, và cuối cùng nhiệt độ đồng đều ở mọi nơi. Vì vậy, trong phương trình nhiệt, nó sẽ là, u này sẽ chỉ đo nhiệt độ đối với nhiệt độ của chất lưu của bạn tại một điểm cho trước.

Actually, it doesn't have to be a fluid. It could be a solid for that heat equation. So, for example, say that you have a big box made of metal or something, and you do some heating at one side. You want to know how quickly is the other side going to get hot? Well, you can use the equation to figure out, you know, say that you have a metal bar, and you keep one side at 400° because it's in your oven. How quickly will the other side get warm?

Trên thực tế, nó không phải là một chất lưu. Nó có thể là chất rắn. Vì vậy, ví dụ, giả sử rằng bạn có một hộp lớn được làm bằng kim loại hay thứ gì đó, và bạn truyền nhiệt vào một phía. Bạn muốn biết phía bên kia sẽ trở nên nóng nhanh bao nhiêu? Vâng, bạn có thể dùng phương trình để chỉ ra, bạn biết, giả sử rằng bạn có một thanh kim loại, và bạn giữ một phía ở 400 ° vì nó ở trong lò nướng của bạn. Phía bên kia sẽ trở nên ấm lên nhanh như thế nào?

OK, so it's the same equation for both phenomena even though they are, of course, different phenomena. Well, the physical reason why they're the same is actually that phenomena are different, but not all that much. They involve, actually, how the atoms and molecules are actually moving, and hitting each other inside this medium. OK, so anyway, what's the explanation for this? So, to understand the explanation, and given what we've been doing, we should have a vector field in there. So, I'm going to think of the flow of, well, let's imagine that we are doing motion of smoke in air. So, that's the flow of the smoke: that means at every point, it's a vector whose direction tells me in which direction the smoke is actually moving.
OK, vì vậy cùng một phương trình cho cả hai hiện tượng cho dù chúng là, tất nhiên, những hiện tượng khác nhau. Vâng, nguyên nhân các hiện tượng khác nhau lại có cùng một phương trình là do chúng có cùng một bản chất vật lí, nhưng chưa hẳn là tất cả. Chúng liên quan đến, thực sự, các nguyên tử và phân tử chuyển động như thế nào, và chạm nhau bên trong môi trường này. OK, do đó dù sao đi nữa, cách giải thích cho điều này là gì? Vì vậy, để hiểu những lời giải thích,và biết trước những gì chúng ta sẽ thực hiện, chúng ta nên có một trường vectơ ở đó. Vì vậy, tôi sẽ nghĩ về sự chuyển động của, vâng, giả sử rằng chúng ta đang làm khói thuốc chuyển động trong không khí. Vâng, đó là dòng khói thuốc: có nghĩa là tại mỗi điểm, nó là một vector cho chúng ta biết khói thuốc đang chuyển động theo hướng nào.

And, its magnitude tells me how fast it's moving, and also what amount of smoke is moving. So, there's two things to understand. One is how the disparities in the concentration between different points causes the flow to be there, how smoke will flow from the regions where there's more smoke to the regions where there's less smoke. And, that's actually physics. But, in a way, it's also common sense. So, physics and common sense tell us that the smoke will flow from high concentration towards low concentration regions.
Và, độ lớn của nó cho chúng ta biết nó đang chuyển động nhanh bao nhiêu, và cũng là lượng khói thuốc đang chuyển động là gì. Vì vậy, có hai điều cần biết. Một là sự chênh lệch mật độ giữa các điểm khác nhau làm cho dòng chảy ở đó như thế nào, khói thuốc sẽ đi từ nơi có nhiều khói đến nơi có ít khói hơn như thế nào. Và, đó thực sự là quá trình vật lý. Nhưng, theo cách nào đó, đó cũng là lẽ thường. Vì vậy, vật lý và cảm giác thông thường cho chúng ta biết rằng khói sẽ đi từ vùng có mật độ cao sang vùng có mật độ thấp hơn.

OK, so if we think of this function, U, that measures concentration, that means we are always going to go in the direction where the concentration decreases the fastest. Well, what's that? That's negative the gradient. So, F is directed along minus gradient u. Now, how big is F going to be? Well, they are, you have to come up with some intuition for how the two are related. And, the easiest relation I can think of is that they might be just proportional.
OK, vì vậy nếu chúng ta xét hàm này, U, nó đo mật độ, điều đó có nghĩa là chúng ta sẽ luôn luôn đi về hướng mật độ giảm nhanh nhất. Vâng, đó là gì? Đó là trừ gradient. Vì vậy, F hướng dọc theo trừ gradient u. Bây giờ, F sẽ lớn như thế nào? Vâng, chúng là, bằng trực giác bạn phải nghĩ ra hai cái liên hệ với nhau như thế nào. Và, quan hệ dễ nhất mà tôi có thể nghĩ ra là tỉ lệ thuận.

So, the steeper the differences in concentration, the faster the flow will be, or the more there will be flow. And, if you try to think about it as molecules moving in random directions, you will see it makes actually complete sense. Anyway, it should be part of your physics class, not part of what I'm telling you. So, I'm just going to accept that the flow is just proportional to the gradient of u.
Vì vậy, sự chênh lệch mật độ càng nhiều, dòng chảy sẽ càng nhanh hơn, hoặc sẽ có nhiều dòng chảy hơn. Và, nếu bạn xem nó như các phân tử chuyển động theo các hướng ngẫu nhiên, bạn sẽ thấy rằng nó hoàn toàn dễ hiểu. Dù sao đi nữa, nó nên là một phần của môn vật lí, chứ không phải toán học. Vì vậy, tôi sẽ chấp nhận rằng dòng chảy tỉ lệ thuận với gradient của u.

So, if you want, the differences between concentrations of different points are very small, then the flow will be very gentle. And, if on the other hand you have huge disparities, then things will try to even out faster. OK, so that's the first part. Now, we need to understand the second part, which is once we know how flow is going, how does that affect the concentration? If smoke is going that way, then it means the concentration here should be decreasing. And there, it should be increasing.
Vì vậy, nếu bạn muốn, sự khác biệt nồng độ của các điểm khác nhau là rất nhỏ, thì dòng chảy sẽ rất nhẹ nhàng. Và, mặt khác nếu bạn có sự chênh lệch nồng độ rất lớn, thì các thứ sẽ cố gắng cân bằng nồng độ nhanh hơn. OK, vì vậy đó là phần đầu tiên. Bây giờ, chúng ta cần phải hiểu phần thứ hai, đó là một khi chúng ta biết dòng chảy đi như thế nào, điều đó ảnh hưởng đến mật độ như thế nào? Nếu khói thuốc đi theo đường đó, thì có nghĩa là mật độ sẽ giảm. Và ở đó, nó sẽ tăng.

So, that's the relation between F and partial u partial t. At that part is actually math, namely, the divergence theorem. So, let's try to understand that part more carefully. So, let's take a small piece of a small region in space, D, bounded by a surface, S. So, I want to figure out what's going on in here. So, let's look at the flux out of D through S. Well, we said that this flux would be given by double integral on S of F dot n dS. So, this flux measures how much smoke is passing through S per unit time. That's the amount of smoke through S per unit time.
Vì vậy, đó là mối quan hệ giữa F và đạo hàm riêng của u theo t. Tại phần đó thực sự là toán học, cụ thể là, định lý phân kỳ. Vì vậy, chúng ta hãy thử hiểu phần đó cẩn thận hơn. Vì vậy, hãy lấy một phần nhỏ của vùng nhỏ trong không gian, D, được bao quanh bởi một bề mặt, S. Vì vậy, tôi muốn tìm ra những gì đang xảy ra tại đây. Vì vậy, hãy xét thông lượng ra ngoài D qua S. Vâng, chúng ta đã nói rằng thông lượng này sẽ được cho bởi tích phân kép của F dot n dS trên S. Vì vậy, thông lượng đo khói đi qua S trên một đơn vị thời gian nhiều bao nhiêu. Đó là lượng khói qua S trên một đơn vị thời gian.

But now, how can I compute that differently? Well, I can compute it just by looking at the total amount of smoke in this region, and seeing how much it changes. If I'm gaining or losing smoke, it means it must be going up there. Well, unless I have a smoker in here, but that's not part of the data. So, that should be, sorry, that's the same thing as the derivative with respect to t of the total amount of smoke in the region, which is given by the triple integral of u.

Nhưng bây giờ, tôi có thể tính cái đó theo cách khác như thế nào? Vâng, tôi có thể tính nó chỉ bằng cách xét lượng khói tổng cộng trong vùng này, và xem nó thay đổi bao nhiêu. Nếu tôi thu thêm hay mất khói, có nghĩa là nó phải lên đó. Vâng, trừ khi tôi có một người hút thuốc ở đây, nhưng đó không phải là một phần của dữ liệu. Vì vậy, đó sẽ là, xin lỗi, giống như đạo hàm theo t của tổng lượng khói trong vùng, nó được cho bởi tích phân ba lớp của u.

If I integrate the concentration of smoke, which means the amount of smoke per unit volume over d, I will get the total amount of smoke in d, except, well, let's see. This flux is counted positively if we go out of d. So, actually, it's minus the derivative. This is the amount of smoke that we are losing per unit time. OK, so now we are almost there. Well, let me actually -- Because we know yet another way to compute this guy using the divergence theorem. Right, so this part here is just common sense and thinking about what it means. The divergence theorem tells me this is also equal to the triple integral, d, of div f dV. So, what I got is that the triple integral over d of div F dV equals this derivative.
Nếu tôi lấy tích phân mật độ khói thuốc, có nghĩa là lượng khói thuốc trên một đơn vị thể tích trên d, tôi sẽ nhận được tổng lượng khói thuốc trong d, ngoại trừ, vâng, chúng ta hãy xét. Thông lượng được tính là dương nếu chúng ta đi ra ngoài d. Vì vậy, trên thực tế, nó bằng trừ đạo hàm. Đây lượng khói thuốc mất đi trong một đơn vị thời gian. OK, vậy bây giờ chúng ta gần như ở đó. Vâng, hãy để tôi thực sự - Bởi vì chúng ta còn biết được cách khác để tính thằng này dùng định lí divergence. Được rồi, vì vậy phần này ở đây chỉ là cảm giác chung và suy nghĩ về ý nghĩa của nó. Định lý divergence cũng cho chúng ta biết cái này cũng bằng tích phân ba lớp, d, của div f dV. Vì vậy, những gì tôi nhận được là tích phân ba lớp của div F dV trên d bằng đạo hàm này.

Well, let's think a bit about this derivative so, see, you are integrating function over x, y, and z. And then, you are differentiating with respect to t. I claim that you can actually switch the order in which you do things. So, when we think about it, is, here, you are taking the total amount of smoke and then see how that changes over time. So, you're taking the derivative of the sum of all the small amounts of smoke everywhere. Well, that will be the sum of the derivatives of the amounts of smoke inside each little box.
Vâng, chúng ta hãy suy nghĩ một chút về đạo hàm này, thấy không, bạn sẽ lấy tích phân hàm trên x, y, và z. Và sau đó, bạn sẽ lấy vi phân theo t. Tôi cho rằng bạn có thể chuyển thứ tự làm các thứ. Vì vậy, khi chúng ta nghĩ về nó, là, ở đây, bạn đang nói tổng lượng khói thuốc và xem nó thay đổi như thế nào theo thời gian. Vì vậy, bạn đang lấy đạo hàm của tổng của tất cả lượng khói thuốc ở mọi nơi. Vâng, đó sẽ là tổng của các đạo hàm của lượng khói thuốc bên trong mỗi hộp nhỏ.

So, we can actually move the derivatives into the integral. So, let's see, I said minus d dt of triple integral over d udV. And, now I'm saying this is the same as the triple integral in d of du dt dv. And the reason why this is going to work is you should think of it as d dt of a sum of u of some values. You plug in the values of your points at that given time times the small volume. You sum them, and then you take the derivative. And now, you see, the derivative of this sum is the sum of the derivatives.
Vì vậy, chúng ta có thể chuyển đạo hàm vào trong tích phân. Vì vậy, xem nào, tôi đã nói trừ d dt của tích phân ba lớp trên d udV. Và, bây giờ tôi sẽ nói cái này tương tự như tích phân ba lớp trong d của du dt dv. Và lý do tại sao điều này đúng là bạn nên nghĩ về nó như là d dt của tổng của u của một số giá trị. Bạn thế vào các giá trị của các điểm của bạn tại thời điểm cho trước nhân thể tích nhỏ. Bạn cộng chúng, và sau đó bạn lấy đạo hàm. Và bây giờ, bạn thấy, đạo hàm của tổng này bằng tổng các đạo hàm.

yi, zi, t, so, if you think about what the integral measures, that's actually pretty easy. And it's because this variable here is not the same as the variables on which we are integrating. That's why we can do it. OK, so now, if we have this for any region, d. So, we have a function of x, y, z, t, and we have another function here. And whenever we integrate them anywhere, we get the same answer. Well, that must mean they're the same. Just think of what happens if you just take d to be a tiny little box. You will get roughly the value of div f at that point times the volume of the box. Or, you will get roughly the value of du dt at that point times the value of a little box. So, the values must be the same. Well, let me actually explain that a tiny bit better.

yi, zi, t, vì vậy, nếu bạn nghĩ về những gì tích phân đo, nó thực sự khá dễ. Và đó là bởi vì biến ở đây không giống như các biến mà chúng ta lấy tích phân. Đó là lý do tại sao chúng ta có thể làm điều đó. OK, vậy bây giờ, nếu chúng ta có điều này cho bất kỳ vùng nào. Vì vậy, chúng ta có một hàm của x, y, z, t, và chúng ta có hàm khác ở đây. Và bất cứ khi nào chúng ta lấy tích phân chúng ở mọi nơi, chúng ta nhận được cùng một kết quả. Vâng, điều đó phải có nghĩa là chúng giống nhau. Chỉ cần nghĩ về những gì xảy ra nếu bạn chọn d là một hộp nhỏ. Bạn sẽ nhận được giá trị của div f tại điểm đó nhân thể tích của hộp. Hoặc, bạn sẽ nhận được khoảng giá trị của du dt tại điểm đó nhân giá trị của hộp nhỏ. Vì vậy, các giá trị phải giống nhau. Vâng, hãy để tôi giải thích thêm điều đó một chút.

So, what I get is that one over, let me divide by the volume of D, sorry. I promise, I'm done in a minute. Is the same thing as one over volume D of negative du dt, dV. So, that means the average value, OK, maybe that's the best way of telling it, the average of div f in D is equal to the average of minus partial u partial t in D. And, that's true for any region, D, not just for some regions, but for, really, any region I can think of. So, the outcome is that actually the divergence of f is equal to minus du dt.
Vâng, những gì tôi nhận được là một trên, hãy để tôi chia cho thể tích của D, xin lỗi. Tôi hứa, Tôi sẽ hoàn thành trong một phút. Là giống như một trên thể tích D của trừ du dt, dV. Vì vậy, điều đó có nghĩa là giá trị trung bình, OK, có lẽ đó là cách tốt nhất để nói nó, giá trị trung bình của div f trong D bằng giá trị trung bình của trừ đạo hàm riêng u theo t trong D. Và, điều đó đúng cho bất kì vùng D nào, không chỉ cho một số vùng, mà đối với, thực sự, bất kỳ vùng nào mà tôi nghĩ. Vì vậy, kết quả thực sự là divergence của f bằng trừ du dt.

And, that's another way to think about what divergence means. The divergence, we said, is how much stuff is actually expanding, flowing out. That's how much we're losing. And so, now, if you combine this with that, you will get that du dt is minus divergence f, which is plus K del squared u. OK, so you combine this guy with that guy, and you get the diffusion equation. OK, that's the end. Happy Thanksgiving break. Try to go to recitation tomorrow if you can so that your TA's are not too lonely. And, enjoy the break. See you next week.
Và, đó là một cách khác để nghĩ về ý nghĩa của divergence. Divergence, chúng ta đã nói, các thứ sẽ mở rộng bao nhiêu, lan ra. Đó là chúng ta đang mất bao nhiêu. Và như vậy, bây giờ, nếu bạn kết hợp cái này với cái đó, bạn sẽ nhận được du dt bằng trừ divergence f, nó bằng trừ K del bình u. OK, vì vậy bạn kết hợp thằng này với thằng đó, và bạn sẽ có được phương trình khuếch tán. OK, hôm nay chỉ có vậy. Chúc Lễ tạ ơn vui vẻ. Hãy cố gắng đến buổi trả lời câu hỏi miệng vào ngày mai nếu bạn có thể để các trợ giảng không quá cô đơn. Và, hãy tận hưởng ngày nghỉ. Hẹn gặp các bạn vào tuần tới.