18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 28

Định lí phân kì (Định lí divergence)
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

Let's get going. Yesterday we learned about flux and we have seen the first few examples of how to set up and compute integrals for a flux of a vector field for a surface. Remember the flux of a vector field F through the surface S is defined by taking the double integral on the surface of F dot n dS where n is the unit normal to the surface and dS is the area element on the surface. As we have seen, for various surfaces, we have various formulas telling us what the normal vector is and what the area element becomes. For example, on spheres we typically integrate with respect to phi and theta for latitude and longitude angles.
Chúng ta hãy tiếp tục. Hôm qua chúng ta đã học về thông lượng và chúng ta đã thấy vài ví dụ đầu tiên về cách thiết lập và tính các tích phân cho thông lượng của một trường vector đối với một bề mặt. Hãy nhớ rằng thông lượng của một trường vectơ F qua bề mặt S được xác định bằng cách lấy tích phân hai lớp của F dot n dS trên bề mặt trong đó n là vector đơn vị vuông góc với bề mặt và dS là yếu tố diện tích trên bề mặt. Như chúng ta đã thấy, đối với các bề mặt khác nhau, chúng ta có các công thức khác nhau cho chúng ta vector pháp tuyến là gì và yếu tố diện tích là gì. Ví dụ, trên các hình cầu thông thường chúng ta lấy tích phân theo phi và theta cho các góc vĩ độ và kinh độ.

On a horizontal plane, we would just end up degrading dx, dy and so on. At the end of lecture we saw a formula. A lot of you asked me how we got it. Well, we didn't get it yet. We are going to try to explain where it comes from and why it works. The case we want to look at is if S is the graph of a function, it is given by z equals some function in terms of x and y. Our surface is out here. Z is a function of x and y. And x and y will range over some domain in the x, y plane, namely the region that is the shadow of the surface on the x, y plane.
Trên một mặt phẳng nằm ngang, chúng ta chỉ còn dx, dy và v.v… Vào cuối bài giảng, chúng ta đã thấy một công thức. Nhiều bạn hỏi tôi làm sao có được nó. Vâng, chúng ta chưa chứng minh. Chúng ta sẽ cố gắng giải thích nó đến từ đâu và tại sao nó đúng. Trường hợp chúng ta muốn xét là nếu S là đồ thị của một hàm, nó được cho bởi z bằng hàm nào đó của x và y. Bề mặt của chúng ta ở ngoài đây. Z là hàm của x và y. Và x và y sẽ trải dài trên miền nào đó trong mặt phẳng x, y, cụ thể đó là hình chiếu của bề mặt trên mặt phẳng x, y.

I said that we will have a formula for n dS which will end up being plus/minus minus f sub x, minus f sub y, one dxdy, so that we will set up and evaluate the integral in terms of x and y. Every time we see z we will replace it by f of xy, whatever the formula for f might be. Actually, if we look at a very easy case where this is just a horizontal plane, z equals constant, the function is just a constant, well, the partial derivatives become just zero. You get <0, 0, 1> dx, dy.
Tôi đã nói chúng ta sẽ có công thức cho n dS là cộng / trừ f x, trừ f y, một dxdy, để chúng ta sẽ thiết lập và tính tích phân theo x và y. Mỗi lần thấy z, chúng ta sẽ thay nó bằng f xy, hay bất cứ công thức nào của f. Thực sự, nếu chúng ta xét một trường hợp rất dễ trong đó đây chỉ là mặt phẳng ngang, z bằng hằng số, hàm chính là hằng số, vâng, đạo hàm riêng bằng không. Bạn nhận được <0, 0, 1> dx, dy.

That is what you would expect for a horizontal plane just from common sense. This is more interesting, of course, if a function is more interesting. How do we get that? Where does this come from? We need to figure out, for a small piece of our surface, what will be n delta S. Let's say that we take a small rectangle in here corresponding to sides delta x and delta y and we look at the piece of surface that is above that.

Well, the question we have now is what is the area of this little piece of surface and what is its normal vector? Observe this little piece up here. If it is small enough, it will look like a parallelogram.
Đó là cảm giác chung của bạn đối với mặt phẳng ngang . Cái này lí thú hơn, tất nhiên, nếu hàm thú vị hơn. Làm sao chúng ta nhận được cái đó? Cái này đến từ đâu? Chúng ta cần tìm ra, đối với một mảnh nhỏ của bề mặt, n delta S sẽ là gì. Giả sử rằng chúng ta chọn một hình chữ nhật nhỏ ở đây tương ứng với các cạnh delta x và delta y và chúng ta xét một mảnh bề mặt trên đó. Vâng, câu hỏi đặt ra bây giờ là diện tích của một mảnh nhỏ của bề mặt này và vector pháp tuyến của nó là gì? Nhìn mảnh nhỏ trên đây. Nếu nó đủ nhỏ, nó sẽ giống như một hình bình hành.

I mean it might be slightly curvy, but roughly it looks like a parallelogram in space. And so we have seen how to find the area of a parallelogram in space using cross-product. If we can figure out what are the vectors for this side and that side then taking that cross-product and taking the magnitude of the cross-product will give us the area. Moreover, the cross-product also gives us the normal direction. In fact, the cross-product gives us two in one.
Ý tôi là nó có thể hơi cong, nhưng nó gần giống một hình bình hành trong không gian. Và vì vậy chúng ta đã biết cách tìm diện tích của hình bình hành trong không gian dùng tích vector. Nếu chúng ta có thể chỉ ra các vectơ cho cạnh này và cạnh đó là gì thì tính tích vector đó và tính độ lớn của tích vector sẽ cho chúng ta diện tích . Hơn nữa, tích vector sẽ cho hướng vuông góc. Thực sự, tích vector mang đến cho chúng ta hai thứ.

It gives us the normal direction and the area element. And that is why I said that we will have an easy formula for n dS while n and dS taken separately are more complicated because you would have to actually take the length of a direction of this guy. Let's carry out this problem. Let's say I am going to look at a small piece of the x, y plane. Here I have delta x, here I have delta y, and I am starting at some point (x, y). Now, above that I will have a parallelogram on my surface. This point here, the point where I start, I know what it is. It is just (x, y). And, well, z is f(x, y).

Nó cho chúng ta hướng vuông góc và yếu tố diện tích. Và đó là lý do tại sao tôi nói rằng công thức cho tổ hợp n dS dễ trong khi viết công thức riêng cho n và dS sẽ phức tạp hơn bởi vì bạn sẽ phải lấy chiều dài của hướng của thằng này. Hãy làm bài tập này. Giả sử rằng tôi sẽ xét một mảnh nhỏ của mặt phẳng x, y . Ở đây tôi có delta x, ở đây tôi có delta y, và tôi bắt đầu tại điểm (x, y) nào đó. Bây giờ, ở trên đó tôi sẽ có một hình bình hành trên bề mặt của tôi. Điểm này ở đây, điểm mà tôi bắt đầu, tôi biết nó là gì. Nó chỉ là (x, y). Và, vâng, z bằng f (x, y).

Now what I want to find, actually, is what are these two vectors, let's call them U and V, that correspond to moving a bit in the x direction or in the y direction? And then U cross V will be, well, in terms of the magnitude of this guy will just be the little piece of surface area, delta S. And, in terms of direction, it will be normal to the surface. Actually, I will get just delta S times my normal vector. Well, up to sign because, depending on whether I do U V or V U, I might get the normal vector in the direction I want or in the opposite direction. But we will take care of that later. Let's find U and V. And, in case you have trouble with that small picture, I have a better one here.

Bây giờ tôi muốn tìm gì, thực sự là, hai vectơ này là gì, hãy gọi chúng là U và V, điều đó tương ứng với di chuyển một chút theo hướng x hoặc theo hướng y? Và thế thì U chéo V (U nhân vector với V) sẽ là, vâng, theo độ lớn của thằng này sẽ là diện tích của phần nhỏ của bề mặt, delta S. Và, theo hướng, nó sẽ vuông góc với bề mặt. Trên thực tế, tôi sẽ nhận được delta S nhân vector pháp tuyến của tôi. Vâng, còn về dấu, tuỳ thuộc vào việc tôi thực hiện UV hay VU, tôi có thể nhận được vector pháp tuyến theo hướng tôi muốn hoặc hướng ngược lại. Nhưng chúng ta sẽ xét điều đó sau. Hãy tìm U và V. Và, trong trường hợp bạn gặp khó khăn với hình nhỏ đó, tôi có cái tốt hơn ở đây.

Let's keep it just in case this one gets really too cluttered. It really represents the same thing. Let's try to figure out these vectors U and V. Vector U starts at the point x, y, f of x, y and it goes to -- Whereas, its head, well, I will have moved x by delta x. So, x plus delta x and y doesn't change. And, of course, the z coordinate has to change. It becomes f of x plus delta x and y. Now, how does f change if I change x a little bit? Well, we have seen that it is given by the partial derivative f sub x. This is approximately equal to f of x, y plus delta x times f sub x at the given point x, y.

Hãy giữ nó trong trường hợp cái mà bạn nhận được quá bừa bộn. Nó thực sự biểu diễn cùng một thứ. Hãy thử chỉ ra những vector U và V này. Vector U bắt đầu tại điểm x, y, f của x, y và nó đi tới - Trong khi đó, đầu của nó, vâng, tôi đã di chuyển x một lượng delta x. Vì vậy, x cộng delta x và y không thay đổi. Và, tất nhiên, tọa độ z phải thay đổi. Nó trở thành f của x cộng delta x và y. Bây giờ, f thay đổi như thế nào nếu tôi thay đổi x một chút? Vâng, chúng ta đã thấy rằng nó là đạo hàm riêng f x. Cái này gần bằng f của x, y cộng delta x nhân f x tại điểm cho trước x, y.

I am not going to add it because the notation is already long enough. That means my vector U, well, approximately because I am using this linear approximation, <delta x, 0, f sub x times delta x>. Is that OK with everyone? Good. Now, what about V? Well, V works the same way so I am not going to do all the details. When I move from here to here x doesn't change and y changes by delta y. X component nothing happens. Y component changes by delta y. What about the z component? Well, f changes by f sub y times delta y. That is how f changes if I increase y by delta y.

Tôi sẽ không thêm nó vào bởi vì kí hiệu quá dài rồi. Điều đó có nghĩa vector U của tôi, vâng, gần đúng bởi vì tôi đang dùng phép gần đúng tuyến tính,<delta x, 0, f x nhân delta x >. Mọi người đồng ý chứ? Tốt. Bây giờ, còn V thì sao? Vâng, V tương tự vì vậy tôi sẽ không làm tất cả các chi tiết. Khi tôi di chuyển từ đây đến đây x không thay đổi và y thay đổi một lượng delta y. Thành phần x không có gì xảy ra. Thành phần y thay đổi một lượng delta y. Thế còn thành phần z thì sao? Vâng, f thay đổi một lượng là f y nhân delta y. Đó là cách f thay đổi nếu tôi tăng y một lượng delta y.

I have my two sides. Now I can take that cross-product. Well, maybe I will first factor something out. See, I can rewrite this as one, zero, f sub x times delta x. And this one I will rewrite as zero, one, f sub y delta y. And so now the cross-product, n hat delta S up to sign is going to be U cross V. We will have to do the cross-product, and we will have a delta x, delta y coming out. I am just saving myself the trouble of writing a lot of delta x's and delta y's, but if you prefer you can just do directly this cross-product.
Tôi có hai cạnh. Bây giờ tôi có thể tính tích vector. Vâng, có lẽ đầu tiên tôi sẽ đem hệ số nào đó ra ngoài. Xem nào, tôi có thể viết lại cái này là một, không, f x nhân delta x. Và tôi sẽ viết lại cái này là không, một, f y delta y. Và vì vậy bây giờ tích vector, n mũ delta S với dấu tùy thuộc vào U nhân vector với V. Chúng ta sẽ phải tính tích vector, và chúng ta sẽ có delta x, delta y xuất hiện. Tôi sẽ không viết nhiều delta x và delta y, nhưng nếu bạn thích bạn có thể tính trực tiếp tích vector này.

Let's compute this cross-product. Well, the i component is zero minus f sub x. The y component is going to be, well, f sub y minus zero but with the minus sign in front of everything, so negative f sub y. And the z component will be just one times delta x delta y. Does that make sense? Yes. Very good. And so now we shrink this rectangle, we shrink delta x and delta y to zero, that is how we get this formula for n dS equals negative fx, negative fy, one, dxdy. Well, plus/minus because it is up to us to choose whether we want to take the normal vector point up or down.
Hãy tính tích vector này. Vâng, thành phần i bằng không trừ f x. Thành phần y sẽ là, vâng, f y trừ không, nhưng với dấu trừ ở phía trước mọi thứ, vì vậy trừ f y. Và thành phần z sẽ là một nhân delta x delta y. Điều đó có dễ thấy không? Đúng. Rất tốt. Và vì vậy bây giờ chúng ta thu nhỏ hình chữ nhật này, chúng ta thu nhỏ delta x và delta y đến không, đó là cách chúng ta nhận được công thức này n dS bằng trừ fx, trừ fy, một, dxdy. Vâng, cộng / trừ bởi vì chúng ta phải có nhiệm vụ chọn vector pháp tuyến hướng lên hay xuống.

See, if you take this convention then the z component of n dS is positive. That corresponds to normal vector pointing up. If you take the opposite signs then the z component will be negative. That means your normal vector points down. This one is with n pointing up. I mean when I say up, of course it is still perpendicular to the surface. If the surface really has a big slope then it is not really going to go all that much up, but more up than down. OK. That is how we get the formula. Any questions? No. OK. That is a really useful formula.
Thấy không, nếu bạn chọn quy ước này thì thành phần z của n dS là dương. Tương ứng với vector pháp tuyến hướng lên. Nếu bạn chọn dấu ngược lại thì thành phần z sẽ âm. Điều đó có nghĩa là vector pháp tuyến của bạn hướng xuống. Đây là n hướng lên. Ý tôi là khi tôi nói lên, tất nhiên nó vẫn còn vuông góc với bề mặt. Nếu bề mặt thực sự có độ dốc lớn thì thực sự nó sẽ không lên nhiều, nhưng lên nhiều hơn xuống. Được rồi. Đó là cách chúng ta có được công thức. Câu hỏi? Không. Được rồi. Đó là một công thức thực sự hữu ích.

You don't really need to remember all the details of how we got it, but please remember that formula. Let's do an example, actually. Let's say we want to find the flux of the vector field z times k, so it is a vertical vector field, through the portion of the paraboloid z equals $x^2 y^2$ that lives above the unit disk. What does that mean? $z = x^2 y^2$. We have seen it many times. It is this parabola and is pointing up. Above the unit disk means I don't care about this infinite surface. I will actually stop when I hit a radius of one away from the z-axis. And so now I have my vector field which is going to point overall up because, well, it is z times k. The more z is positive, the more your vector field goes up.
Bạn thực sự không cần phải nhớ tất cả các chi tiết về cách chúng ta nhận được nó, nhưng hãy nhớ công thức đó. Hãy làm một ví dụ. Giả sử rằng chúng ta muốn tìm thông lượng của trường vector z nhân k, vì vậy nó là một trường vector thẳng đứng, qua phần của paraboloid z bằng $x^2 y^2$ nằm trên hình tròn đơn vị. Điều đó nghĩa là gì? $z = x^2 y^2$. Chúng ta đã thấy nó nhiều lần. Nó là parabol này và đang hướng lên. Bên trên hình tròn đơn vị có nghĩa là có nghĩa là tôi không quan tâm đến bề mặt vô hạn này. Thực sự tôi sẽ dừng lại khi tôi chạm bán kính của cái cách xa trục z . Và vì vậy bây giờ tôi có trường vector của tôi sẽ hướng lên hoàn toàn bởi vì, vâng, nó là z nhân k. z càng dương, trường vector của tôi càng đi lên.

Of course, if z were negative then it would point down, but it will live above. Actually, a quick opinion poll. What do you think the flux should be? Should it be positive, zero, negative or we don't know? I see some I don't know, I see some negative and I see some positive. Of course, I didn't tell you which way I am orienting my paraboloid. So far both answers are correct. The only one that is probably not correct is zero because, no matter which way you choose to orient it you should get something. It is not looking like it will be zero. Let's say that I am going to do it with the normal pointing upwards.
Tất nhiên, nếu z âm thì nó sẽ hướng xuống, nhưng nó sẽ nằm ở trên. Lấy ý kiến nhanh. Bạn nghĩ thông lượng sẽ là gì? Nó là dương, bằng không, âm hoặc chúng ta không biết? Tôi thấy một số người chọn phương án ba, một số chọn âm và một số chọn dương. Tất nhiên, tôi sẽ không cho bạn biết tôi sẽ định hướng paraboloid theo đường nào. Cho đến bây giờ cả hai câu trả lời đều đúng. Nhưng kết quả bằng không sẽ không chính xác bởi vì, bạn chọn đường nào để định hướng nó không quan trọng bạn sẽ nhận được cái gì đó. Có vẻ như không thể bằng không. Giả sử rằng tôi sẽ thực hiện nó với vector pháp tuyến hướng lên.

Second chance. I see some people changing back and forth from one and two. Let's draw a picture. Which one is pointing upwards? Well, let's look at the bottom point. The normal vector pointing up, here we know what it means. It is this guy. If you continue to follow your normal vector, see, they are actually pointing up and into the paraboloid. And I claim that the answer should be positive because the vector field is crossing our paraboliod going upwards, going from the outside out and below to the inside and upside. So, in the direction that we are counting positively.
Cơ hội thứ hai. Tôi thấy một số người thay đổi qua lại giữa một và hai. Chúng ta hãy vẽ hình. Cái nào hướng lên? Vâng, hãy xét điểm đáy. Vector pháp tuyến hướng lên, ở đây chúng ta biết ý nghĩa của nó. Nó là thằng này. Nếu bạn tiếp tục theo vector pháp tuyến của bạn, thấy không, chúng thực sự hướng lên và đi vào trong paraboloid. Và tôi cho rằng câu trả lời sẽ là dương bởi vì trường vector đi qua paraboliod hướng lên, đi từ bên ngoài và bên dưới đến bên trong và bên trên. Vì vậy, theo hướng mà chúng ta đang tính dương.

We will see how it turns out when we do the calculation. We have to compute the integral for flux. Double integral over a surface of F dot n dS is going to be -- What are we going to do? Well, F we said is <0, 0, z>. What is n dS. Well, let's use our brand new formula. It says negative f sub x, negative f sub y, one, dxdy. What does little f in here? It is $x^2 y^2$. When we are using this formula, we need to know what little x stands for.
Chúng ta sẽ thấy tại sao như vậy khi chúng ta thực hiện tính toán. Chúng ta phải tính tích

phân cho thông lượng. Tích phân kép của F dot n dS trên bề mặt sẽ là - Chúng ta sẽ làm gì? Vâng, F mà chúng ta nói là <0, 0, z>. n dS là gì. Vâng, chúng ta hãy sử dụng công thức mới. Nó nói trừ f x, trừ f y, một, dxdy. f nhỏ ở đây là gì? Nó là $x^2 y^2$. Khi chúng ta dùng công thức này, chúng ta cần biết x nhỏ chỉ cái gì.

It is whatever the formula is for z as a function of x and y. We take $x^2 y^2$ and we take the partial derivatives with minus signs. We get negative 2x, negative 2y and one, dxdy. Well, of course here it didn't really matter because we are going to dot them with zero. Actually, even if we had made a mistake we somehow wouldn't have had to pay the price. But still. We will end up with double integral on S of z dxdy. Now, what do we do with that? Well, we have too many things. We have to get rid of z. Let's use z equals $x^2 y^2$ once more.
Nó là bất cứ hàm z theo x, y nào. Chúng ta lấy $x^2 y^2$ và chúng ta lấy đạo hàm riêng với các dấu trừ. Chúng ta nhận được trừ 2x, trừ 2y và một, dxdy. Vâng, tất nhiên ở đây nó không thực sự quan trọng bởi vì chúng ta sẽ nhân vô hướng chúng với không. Thực sự, nếu chúng ta bị sai chúng ta cũng sẽ không phải trả giá. Nhưng vẫn còn. Chúng ta sẽ kết thúc với tích phân kép của z dxdy trên S. Bây giờ, chúng ta làm gì với cái đó? Vâng, chúng ta có quá nhiều thứ. Chúng ta phải khử z. Hãy sử dụng z bằng $x^2 y^2$ một lần nữa.

That becomes double integral of $x^2 y^2$ dxdy. And here, see, we are using the fact that we are only looking at things that are on the surface. It is not like in a triple integral. You could never do that because z, x and y are independent. Here they are related by the equation of a surface. If I sound like I am ranting, but I know from experience this is where one of the most sticky and tricky points is.
Nó trở thành tích phân kép của $x^2 y^2$ dxdy. Và ở đây, thấy không, chúng ta đang dùng sự kiện chúng ta chỉ xét các thứ trên bề mặt. Nó không giống như tích phân ba lớp. Bạn không bao giờ có thể làm điều đó bởi vì z, x và y là độc lập. Ở đây chúng quan hệ với nhau qua phương trình bề mặt. Tôi có cường điệu không, nhưng tôi biết từ kinh nghiệm đây là chổ hơi khó.

OK. How will we actually integrate that? Well, now that we have just x and y, we should figure out what is the range for x and y. Well, the range for x and y is going to be the shadow of our region. It is going to be this unit disk. I can just do that for now. And this is finally where I have left the world of surface integrals to go back to

a usual double integral. And now I have to set it up. Well, I can do it this way with dxdy, but it looks like there is a smarter thing to do. I am going to use polar coordinates. In fact, I am going to say this is double integral of r^2 times r dr d theta. I am on the unit disk so r goes zero to one, theta goes zero to 2pi. And, if you do the calculation, you will find that this is going to be pi over two.
Vâng. Chúng ta lấy tích phân cái đó như thế nào? Vâng, bây giờ chúng ta chỉ có x và y, chúng ta nên tìm ra phạm vi của x và y. Vâng, phạm vi cho x và y sẽ là hình chiếu của vùng của chúng ta. Đó là hình tròn đơn vị này. Tôi chỉ có thể làm điều đó bây giờ. Và đây là cuối cùng ở đó tôi rời khỏi thế giới của tích phân mặt để quay lại tích phân kép b ình thường. Và bây giờ tôi phải thiết lập nó. Vâng, tôi có thể làm theo cách này với dxdy, nhưng hình như có cách thông minh hơn. Tôi sẽ sử dụng hệ tọa độ cực. Trong thực tế, tôi sẽ nói cái này là tích phân kép của r ^ 2 nhân r dr d theta. Tôi đang ở trên hình tròn đơn vị vì vậy r đi từ không đến một, theta đi từ không đến 2pi. Và, nếu bạn thực hiện tính toán, bạn sẽ tìm được cái này bằng pi trên hai.

Any questions about the example. Yes? How did I get this negative 2x and negative 2y? I want to use my formula for n dS. My surface is given by the graph of a function. It is the graph of a function x^2 y^2. I will use this formula that is up here. I will take the function x^2 y^2 and I will take its partial derivatives. If I take the partial of f, so x^2 y^2 with respect to x, I get 2x, so I put negative 2x. And then the same thing, negative 2y, one, dxdy. Yes?
Có bất kì câu hỏi nào về các ví dụ. Xin mời? Làm sao tôi nhận được trừ 2x và trừ 2y này? Tôi muốn sử dụng công thức của tôi cho n dS. Bề mặt của tôi được cho bởi đồ thị của một hàm. Nó là đồ thị của hàm x ^ 2 y ^ 2. Tôi sẽ sử dụng công thức trên đây.Tôi sẽ lấy hàm x ^ 2 y ^ 2 và tôi sẽ lấy đạo hàm riêng của nó. Nếu tôi lấy đạo hàm riêng của f, vì vậy x ^ 2 y ^ 2 theo x, tôi được 2x, vì vậy tôi đặt trừ 2x. Và sau đó tương tự, trừ 2y, một, dxdy. Xin mời?

Which k hat? Oh, you mean the vector field. It is a different part of the story. Whenever you do a surface integral for flux you have two parts of the story. One is the vector field whose flux you are taking. The other one is the surface for which you will be taking flux. The vector field only comes as this f in the notation, and everything else, the bounds in the double integral and the n dS, all come from the surface that we are looking at. Basically, in all of this calculation, this is coming from f equals zk. Everything else comes from the information paraboloid z = x^2 y^2 above the unit disk.
k mũ nào? Oh, bạn muốn nói trường vector. Nó là một phần khác của câu chuyện. Bất cứ khi nào bạn tính tích phân mặt cho thông lượng bạn có hai phần của câu chuyện. Một là trường vector bạn đang xét là gì. Hai là bề mặt mà trường vector đi qua. Trường vector là f này theo quy ước, và mọi thứ khác, các cận trong tích phân kép và n dS, tất cả đến từ bề mặt mà chúng ta đang xét. Về cơ bản, trong tất cả tính toán này, cái này đến từ f bằng zk. Mọi thứ khác đến từ thông tin paraboloid z = x ^ 2 y ^ 2 trên hình tròn đơn vị.

In particular, if we wanted to now find the flux of any other vector field for the same paraboloid, well, all we would have to do is just replace this guy by whatever the new vector field is. We have learned how to set up flux integrals for this paraboloid. Not that you should remember this one by heart. I mean there are many paraboloids in life and other surfaces, too. It is better to remember the general method. Any other questions? No. OK. Let's see more ways of taking flux integrals. But, just to reassure you, at this point we have seen the most important ones. 90% of the problems that we will be looking at we can do with what we have seen so far in less time and this formula.
Đặc biệt, nếu bây giờ chúng ta muốn tìm thông lượng của bất kỳ trường vector cho cùng một paraboloid này, vâng, tất cả những gì chúng ta phải làm là chỉ cần thay thằng này bằng trường vector mới nào đó. Chúng ta đã biết cách thiết lập tích phân thông lượng cho paraboloid này. Chú ý rằng bạn nên thuộc lòng cái này. Ý tôi là có nhiều paraboloid trong cuộc sống và các mặt khác nữa. Tốt hơn là nhớ những phương pháp chung. Câu hỏi? Không. OK. Chúng ta hãy xét thêm những cách tính tích phân thông lượng. Nhưng, để

trấn an bạn, vào thời điểm này chúng ta đã thấy những cái quan trọng nhất. Chúng ta có thể làm 90% bài tập dựa vào những gì chúng ta đã học ở trên và công thức này.

Let's look a little bit at a more general situation. Let's say that my surface is so complicated that I cannot actually express z as a function of x and y, but let's say that I know how to parametize it. I have a parametric equation for my surface. That means I can express x, y and z in terms of any two parameter variables that might be relevant for me. If you want, this one here is a special case where you can parameterize things in terms of x and y as your two variables. How would you do it in the fully general case? In a way, that will answer your question that, I think one of you, I forgot, asked yesterday how would I do it in general? Is there a formula like M dx plus N dy? Well, that is going to be the general formula. And you will see that it is a little bit too complicated, so the really useful ones are actually the special ones.
Hãy xét một chút về trường hợp tổng quát hơn. Giả sử rằng bề mặt của tôi quá phức tạp đến nỗi tôi không thể biểu diễn z như hàm của x và y, nhưng giả sử rằng tôi biết cách tham số hóa nó. Tôi có phương trình tham số cho bề mặt của tôi. Điều đó có nghĩa là tôi có thể biểu diễn x, y và z theo bất kì hai biến tham số nào thích hợp. Nếu bạn muốn, cái này ở đây là trường hợp đặc biệt khi bạn có thể tham số hóa mọi thứ theo x và y như hai biến của bạn. Bạn sẽ làm nó như thế nào trong trường hợp tổng quát? Đó sẽ là câu trả lời cho câu hỏi mà, tôi nghĩ rằng một trong các bạn, à quên, hỏi ngày hôm qua tôi làm nó như thế nào trong trường hợp tổng quát? Có công thức nào như kiểu M dx cộng N dy không? Vâng, đó sẽ là công thức tổng quát. Và bạn sẽ thấy rằng nó quá phức tạp, do đó những thứ thực sự hữu dụng là những cái đặc biệt.

Let's say that we are given a parametric description -- -- of a surface S. That means we can describe S by formulas saying x is some function of two parameter variables. I am going to call them u and v. I hope you don't mind. You can call them t1 and t2. You can call them whatever you want. One of the basic properties of a surface is because I have only two independent directions to move on. I should be able to express x, y and z in terms of two variables. Now, let's say that I know how to do that. Or, maybe I should instead think of it in terms of a position vector if it helps you. That is just a vector with components <x, y, z> is given as a function of u and v.
Giả sử rằng chúng ta được cho một sự mô tả tham số - - của bề mặt S. Điều đó có nghĩa là chúng ta có thể mô tả S bằng các công thức chẳng hạn như x là một số hàm nào đó của hai biến tham số.Tôi sẽ gọi chúng là u và v. Tôi hy vọng bạn không phiền. Bạn có thể gọi chúng là t1 và t2. Bạn có thể gọi chúng bất cứ tên gì bạn muốn. Một trong những tính chất cơ bản của bề mặt là bởi vì tôi chỉ có hai hướng độc lập để di chuyển. Tôi có thể biểu diễn x, y và z theo hai biến. Bây giờ, giả sử rằng tôi biết cách làm điều đó. Hoặc, thay vì vậy có lẽ tôi nghĩ nó theo một vector vị trí nếu nó giúp bạn dễ hiểu. Đó chỉ là một vector với các thành phần <x, y, z> được cho như hàm của u và v.

It works like a parametric curve but with two parameters. Now, how would we actually set up a flux integral on such a surface. Well, because we are locating ourselves in terms of u and v, we will end up with an integral du dv. We need to figure out how to express n dS in terms of du and dv. N dS should be something du dv. How do we do that? Well, we can use the same method that we have actually used over here. Because, if you think for a second, here we used, of course, a rectangle in the x, y plane and we lifted it to a parallelogram and so on. But more generally you can think what happens if I change u by delta u keeping v constant or the other way around?
Nó giống như một đường cong tham số nhưng với hai tham số. Bây giờ, chúng ta sẽ thiết lập tích phân thông lượng trên một bề mặt như thế như thế nào. Vâng, bởi vì chúng ta tự định vị mình theo u và v, cuối cùng chúng ta sẽ nhận được một tích phân du dv. Chúng ta cần tìm ra cách biểu diễn n dS theo du và dv. N dS sẽ là cái gì đó du dv. Chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, chúng ta có thể sử dụng cùng một phương pháp mà chúng ta đã dùng trên đây. Bởi vì, nếu bạn suy nghĩ một chút, ở đây chúng ta đã sử dụng, tất nhiên, một hình chữ nhật trong mặt phẳng x, y và chúng ta dựng nó thành hình bình hành và v.v…. Nhưng nói chung bạn có thể nghĩ về những gì xảy ra nếu tôi thay u bằng delta u giữ v không đổi hoặc cách khác?

You will get some sort of mesh grid on your surface and you will look at a little parallelogram that is an elementary piece of that mesh and figure out what is its area and normal vector. Well, that will again be given by the cross-product of the two sides. Let's think a little bit about what happens when I move a little bit on my surface. I am taking this grid on my surface given by the u and v directions.
Bạn sẽ nhận được một loại lưới đan nào đó trên bề mặt của bạn và bạn sẽ xét một hình bình hành nhỏ là một mảnh cơ bản của lưới đó và tìm ra diện tích và vector pháp tuyến của nó là gì. Vâng, nó lại sẽ là tích vector của hai cạnh. Hãy suy nghĩ một chút về những gì xảy ra khi tôi di chuyển một chút trên bề mặt của tôi. Tôi đang chọn lưới này trên bề mặt của tôi được cho bởi các hướng u và v.

And, if I take a piece of that corresponding to small changes delta u and delta v, what is going to be going on here? Well, I have to deal with two vectors, one corresponding to changing u, the other one corresponding to changing v. If I change u, how does my point change? Well, it is given by the derivative of this with respect to u. This vector here I will call, so the sides are given by, let me say, partial r over partial u times delta u. If you prefer, maybe I should write it as partial x over partial u times delta u. Well, it is just too boring to write.
Và, nếu tôi chọn một mảnh của nó tương ứng với sự thay đổi nhỏ delta u delta v, điều gì sẽ xảy ra ở đây? Vâng, tôi phải xét hai vectơ, một tương ứng với sự thay đổi u, cái kia tương ứng với sự thay đổi v. Nếu tôi thay đổi u, điểm của tôi thay đổi như thế nào? Vâng, nó là đạo hàm của cái này theo u. Vector này ở đây tôi sẽ gọi, vâng các cạnh là, để xem, đạo hàm riêng của r theo u nhân delta u. Nếu thích, tôi có thể viết nó là đạo hàm riêng của x theo u nhân delta u. Vâng, viết vậy hơi nhàm chán.

And so on. It means if I change u a little bit, keeping v constant, then how x changes is, given by partial x over partial u times delta u, same thing with y, same thing with z, and I am just using vector notation to do it this way. That is the analog of when I said delta r for line integrals along a curve, vector delta r is the velocity vector dr dt times delta t. Now, if I look at the other side –
Và v.v…. Có nghĩa là nếu tôi thay đổi u một chút, giữ v không đổi, thì sự thay đổi của x, chính là đạo hàm riêng của x theo u nhân delta u, tương tự với y, tương tự với z, và tôi chỉ sử dụng ký hiệu vector để làm điều nó theo cách này. Điều đó giống như khi tôi nói delta r cho tích phân đường dọc theo đường cong, vector delta r là vector vận tốc dr dt nhân delta t. Bây giờ, nếu tôi xét cạnh còn lại -

Let me start again. I ran out of space. One side is partial r over partial u times delta u. And the other one would be partial r over partial v times delta v. Because that is how the position of your point changes if you just change u or v and not the other

one. To find the surface element together with a normal vector, I would just take the cross-product between these guys. If you prefer, that is the cross-product of partial r over partial u with partial r over partial v, delta u delta v. And so n dS is this cross-product times du dv up to sign.
Hãy để tôi bắt đầu lại. Tôi chạy ra khỏi không gian. Một cạnh là đạo hàm riêng của r theo u nhân delta u. Và cạnh kia sẽ là đạo hàm riêng của r theo v nhân delta v. Bởi vì đó là cách thay đổi vị trí của điểm của bạn nếu bạn chỉ thay đổi u hoặc v và chứ không phải cái còn lại. Để tìm yếu tố bề mặt cùng với vector pháp tuyến, tôi sẽ lấy tích vector của những thằng này. Nếu bạn thích, đó là tích vector của đạo hàm riêng của r theo u với đạo hàm riêng của r theo v, delta u delta v. Và như vậy n dS là tích vector này nhân du dv cùng với dấu.

It depends on which choice I make for my normal vector, of course. That, of course, is a slightly confusing equation to think of. A good exercise, if you want to really understand what is going on, try this in two good examples to look at. One good example to look at is the previous one. What is it? It is when u and v are just x and y. The parametric equations are just x equals x, y equals y and z is f of x, y. You should end up with the same formula that we had over there. And you should see why because both of them are given by a cross-product. The other case you can look at just to convince yourselves even further. We don't need to do that because we have seen the formula before, but in the case of a sphere we have seen the formula for n and for dS separately.
Tất nhiên, nó phụ thuộc vào tôi chọn cái nào cho vector pháp tuyến của tôi. Điều đó, tất nhiên, là một phương trình hơi khó hiểu. Một bài tập tốt, nếu bạn muốn thực sự hiểu những gì đang xảy ra, hãy thử điều này trong hai ví dụ. Một ví dụ là cái trước. Nó là gì? Đó là khi u và v chỉ là x và y. Các phương trình tham số chỉ là x bằng x, y bằng y và z bằng f của x, y. Bạn sẽ được cùng một công thức mà chúng ta đã có trên kia. Và bạn sẽ thấy tại sao cả hai đều được cho bởi một tích vector. Các trường hợp khác bạn có thể xét để tự thuyết phục bạn thêm nữa. Chúng ta không cần phải làm điều đó bởi vì chúng ta đã thấy công thức từ trước, nhưng trong trường hợp của hình cầu chúng ta đã gặp công thức cho n và cho dS riêng biệt.

We know what n dS are in terms of d phi, d theta. Well, you could parametize a sphere in terms of phi and theta. Namely, the formulas would be x equals a sine phi cosine theta, y equals a sign phi sine theta, z equals a cosine phi. The formulas for circle coordinates setting Ro equals a . That is a parametric equation for the sphere.

And then, if you try to use this formula here, you should end up with the same things we have already seen for n dS, just with a lot more pain to actually get there because cross-product is going to be a bit complicated. But we are seeing all of these formulas all fitting together. Somehow it is always the same question. We just have different angles of attack on this general problem. Questions?
Chúng ta biết những ndS là gì theo d phi, d theta. Vâng, bạn có thể tham số hóa hình cầu theo phi và theta. Cụ thể, công thức sẽ là x bằng a sin phi cos theta, y bằng a sin phi sin theta, z bằng a cosin phi. Công thức cho các tọa độ tròn thiết lập Ro bằng a. Đó là phương trình tham số cho hình cầu. Và sau đó, nếu bạn thử dùng công thức này ở đây, bạn sẽ được điều tương tự như chúng ta đã thấy cho n dS, chỉ là hơi khó khăn hơn để nhận được điều đó bởi vì tích vector hơi phức tạp. Nhưng chúng ta sẽ thấy tất cả những công thức này phù hợp với nhau. Bằng cách nào đó nó luôn luôn là cùng một câu hỏi. Chỉ là những cách tiếp cận khác nhau đối với bài toán tổng quát này. Các câu hỏi?

No. OK. Let's look at yet another last way of finding n dS. And then I promise we will switch to something else because I can feel that you are getting a bit overwhelmed for all these formulas for n dS. What happens very often is we don't actually know how to parametize our surface. Maybe we don't know how to solve for z as a function of x and y, but our surface is given by some equation. And so what that means is actually maybe what we know is not really these kinds of formulas, but maybe we know a normal vector.
Không. Được rồi. Vẫn còn một cách cuối cùng để tìm n dS. Và sau đó tôi hứa chúng ta sẽ chuyển sang chủ đề khác bởi vì tôi cảm thấy rằng đầu các bạn đang đầy ấp với những công thức cho n dS. Những gì xảy ra rất thường xuyên là chúng ta không thực sự biết cách tham số hóa bề mặt. Có lẽ chúng ta không biết cách giải z như hàm của x và y, nhưng bề mặt của chúng ta được cho bởi phương trình nào đó. Và vì vậy điều đó có nghĩa là những gì chúng ta biết không thực sự là những loại công thức này, mà có lẽ chúng ta biết một vector pháp tuyến.

And I am going to call this one capital N because I don't even need it to be a unit vector. You will see. It can be a normal vector of any length you want to the surfaces. Why would we ever know a normal vector? Well, for example, if our surface is a plane, a slanted plane given by some equation, ax by cz = d. Well, you know the normal vector. It is <a, b, c>. Of course, you could solve for z and then go back to that case, which is why I said that one is very useful. But you can also just stay with a normal vector. Why else would you know a normal vector? Well, let's say that you know an equation that is of a form g of x, y, z equals zero. Well, then you know that the gradient of g is perpendicular to the level surface. Let me just give you two examples.
Và tôi sẽ gọi cái này là N lớn bởi vì tôi thậm chí không cần nó phải là một vectơ đơn vị. Bạn sẽ thấy. Nó có thể là một vector pháp tuyến độ dài bất kì mà bạn muốn của bề mặt. Tại sao chúng ta từng biết một vector pháp tuyến? Vâng, ví dụ, nếu bề mặt của chúng ta phẳng, một mặt phẳng nghiêng được cho bởi phương trình nào đó, ax by cz = d. Vâng, bạn biết vector pháp tuyến. Đó là <a, b, c>. Tất nhiên, bạn có thể giải tìm z và sau đó trở lại trường hợp đó, đó là lý do tại sao tôi cho rằng cái đó rất hữu dụng. Nhưng bạn cũng có thể còn lại một vector pháp tuyến. Tại sao bạn biết một vector pháp tuyến khác? Vâng, giả sử rằng bạn biết một phương trình có dạng g của x, y, z bằng không. Vâng, thế thì bạn biết rằng gradient của g vuông góc với bề mặt đồng mức. Hãy để tôi cho bạn hai ví dụ.

If you have a plane, ax by cz = d, then the normal vector would just be <a, b, c>. If you have a surface S given by an equation, g(x, y, z) = 0, then you can take a normal vector to be the gradient of g. We have seen that the gradient is perpendicular to the level surface. Now, of course, we don't necessarily have to follow what is going to come. Because, if we could solve for z, then we might be better off doing what we did over there. But let's say that we want to do it this. What can we do? Well, I am going to give you another way to think geometrically about n dS.

Nếu bạn có một mặt phẳng, ax by cz = d, thì vector pháp tuyến sẽ là <a, b, c>. Nếu bạn có một bề mặt S được cho bởi phương trình, g (x, y, z) = 0, thì bạn có thể chọn vector pháp tuyến là gradient của g. Chúng ta đã thấy rằng gradient vuông góc với bề mặt đồng mức. Bây giờ, tất nhiên, chúng ta không nhất thiết phải theo dõi những gì sẽ đến. Bởi vì, nếu chúng ta có thể giải tìm z, thì tốt hơn là làm những gì ở đây. Nhưng giả sử rằng chúng ta muốn làm nó như thế này. Chúng ta có thể làm gì? Vâng, tôi sẽ chỉ cho bạn một cách để xét n dS bằng phương pháp hình học.

Let's start by thinking about the slanted plane. Let's say that my surface is just a slanted plane. My normal vector would be maybe somewhere here. And let's say that I am going to try -- I need to get some handle on how to set up my integrals, so maybe I am going to express things in terms of x and y. I have my coordinates, and I will try to use x and y. Then I would like to relate delta S or dS to the area in the x y plane. That means I want maybe to look at the projection of this guy onto a horizontal plane.
Hãy bắt đầu bằng suy nghĩ về mặt phẳng nghiêng. Giả sử rằng bề mặt của tôi chỉ là một mặt phẳng nghiêng. Vector pháp tuyến của tôi sẽ ở đâu đó quanh đây. Và giả sử rằng tôi sẽ thử - tôi cần phải nhận được một số cách xử lý về cách thiết lập các tích phân của tôi, như vậy có lẽ tôi sẽ biểu diễn các thứ theo x và y. Tôi có các tọa độ của tôi, và tôi sẽ thử dùng x và y. Sau đó, tôi muốn thiết lập mối quan hệ giữa delta S hoặc dS với diện tích trong mặt phẳng xy. Điều đó có nghĩa là tôi muốn xét hình chiếu của thằng này trên mặt phẳng ngang.

Let's squish it horizontally. Then you have here another area. The guy on the slanted plane, let's call that delta S. And let's call this guy down here delta A. And delta A would become ultimately maybe delta x, delta y or something like that. The question is how do we find the conversion rate between these two areas? I mean they are not the same. Visually, I hope it is clear to you that if my plane is actually horizontal then, of course, they are the same. But the more slanted it becomes the more delta A becomes smaller than delta S. If you buy land and it is on the side of a cliff, well, whether you look at it on a map or whether you look at it on the actual cliff, the area is going to be very different.
Hãy bóc vỏ nó theo phương ngang. Thế thì ở đây bạn có diện tích khác. Thằng nằm trên mặt phẳng nghiêng, hãy gọi đó là delta S. Và chúng ta hãy gọi thằng này dưới đây là delta A. Và cuối cùng có lẽ delta A sẽ trở thành delta x, delta y hay cái gì tương tự thế. Vấn đề đặt ra là chúng ta tìm tỉ lệ chuyển đổi giữa hai diện tích này như thế nào? Ý tôi là chúng không giống nhau. Tôi hy vọng mọi thứ đã rõ đối với bạn rằng nếu mặt phẳng của tôi nằm ngang thì, tất nhiên, chúng giống nhau. Nhưng nó ngày càng nghiêng hơn thì delta A ngày càng nhỏ hơn delta S. Nếu bạn mua đất và nó ở một vách đá, vâng, tùy thuộc vào bạn nhìn nó trên bản đồ hoặc nhìn nó trên vách đá, diện tích sẽ rất khác nhau.

I am not sure if that is a wise thing to do if you want to build a house there, but I bet you can get really cheap land. Anyway, delta S versus delta A depends on how slanted things are. And let's try to make that more precise by looking at the angel that our plane makes with the horizontal direction. Let's call this angle alpha, the angle that our plane makes with the horizontal direction. See, it is all coming together. The first unit about cross-products, normal vectors and so on is actually useful now.
Việc xây dựng một ngôi nhà ở đó có phải là điều khôn ngoan không, tôi không dám nói, nhưng tôi dám chắc bạn sẽ mua được đất rẻ. Dù sao đi nữa, delta S so với delta A phụ thuộc vào cách các thứ nghiêng như thế nào. Và hãy thử làm cho điều đó chính xác hơn bằng cách xét góc mà mặt phẳng của chúng ta tạo với hướng ngang. Hãy gọi đây là góc alpha, góc giữa mặt phẳng của chúng ta và hướng ngang. Xem nào, tất cả đến cùng nhau. Bài đầu tiên về các tích vector, vectơ pháp tuyến và v.v…bây giờ thực sự có ích.

I claim that the surface element is related to the area in the plane by delta A equals delta S times the cosine of alpha. Why is that? Well, let's look at this small rectangle with one horizontal side and one slanted side. When you project this side does not change, but this side gets shortened by a factor of cosine alpha. Whatever this length was, this length here is that one times cosine alpha.
Tôi cho rằng yếu tố bề mặt có liên quan đến diện tích trong mặt phẳng qua delta A bằng delta S nhân cos alpha. Tại sao vậy? Vâng, hãy xét hình chữ nhật nhỏ với một cạnh nằm ngang và cạnh nghiêng. Khi bạn chiếu cạnh này không thay đổi, nhưng cạnh này ngắn hơn một hệ số cos alpha. Bất kể chiều dài này là gì, chiều dài này ở đây bằng cái đó nhân cos alpha.

That is why the area gets shrunk by cosine alpha. In one direction nothing happens. In the other direction you squish by cosine alpha. What that means is that, well, we will have to deal with this. And, of course, the one we will care about actually is delta S expressed in terms of delta A. But what are we going to do with this cosine? It is not very convenient to have a cosine left in here. Remember, the angle between two planes is the same thing as the angle between the normal vectors. If you want to see this angle alpha elsewhere, what you can do is you can just take the vertical direction. Let's take k. Then here we have our angle alpha again.
Đó là lý do tại sao diện tích bị co lại một lượng cos alpha. Theo một hướng không có gì xảy ra. Theo hướng khác bạn bóc vỏ một lượng cô sin alpha. Điều này có nghĩa là, vâng, chúng ta sẽ phải xét cái này. Và, tất nhiên, cái mà chúng ta sẽ quan tâm thực sự là delta S được biểu diễn theo delta A. Nhưng chúng ta sẽ làm gì với cosin này? Cosin còn lại ở đây không thuận lợi chút nào. Hãy nhớ rằng, góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai vector pháp tuyến. Nếu bạn muốn thấy góc alpha này ở nơi khác, những gì bạn có thể làm là bạn chỉ cần chọn hướng thẳng đứng. Chúng ta hãy chọn k.Thế thì ở đây chúng ta lại có góc alpha của chúng ta.

In particular, cosine of alpha, I can get, well, we know how to find the angle between two vectors. If we have our normal vector N, we will do N dot k, and we will divide by length N, length k. Well, length k is one. That is one easy guy. That is how we find the angle. Now I am going to say, well, delta S is going to be one over cosine alpha delta A. And I can rewrite that as length of N divided by N dot k times delta A.
Đặc biệt, cô sin của alpha, tôi có thể nhận được, vâng, chúng ta biết cách tìm góc giữa hai vector. Nếu chúng ta có vector pháp tuyến N, chúng ta sẽ thực hiện N dot k, và chúng ta sẽ chia cho chiều dài N, chiều dài k. Vâng, chiều dài k bằng một. Đó là một cái dễ. Đó là cách chúng ta tìm góc. Bây giờ tôi sẽ nói, vâng, delta S sẽ là một trên cosin alpha delta A. Và tôi có thể viết lại điều đó như là chiều dài của N chia cho N dot k nhân delta A.

Now, let's multiply that by the unit normal vector. Because what we are about is not so much dS but actually n dS. N delta S will be, I am just going to multiply by N. Well, let's think for a second. What happens if I take a unit normal N and I multiply it by the length of my other normal big N? Well, I get big N again. This is a normal vector of the same length as N, well, up to sign. The only thing I don't know is whether this guy will be going in the same direction as big N or in the opposite

direction. Say that, for example, my capital N has, I don't know, length three for example. Then the normal unit vector might be this guy, in which case indeed three times little n will be big n.
Bây giờ, hãy nhân cái đó với vector pháp tuyến đơn vị. Bởi vì những gì chúng ta quan tâm không phải là dS mà là n dS. N delta S sẽ là, tôi chỉ cần nhân với N. Vâng, chúng ta hãy suy nghĩ một giây. Điều gì xảy ra nếu tôi lấy một vector đơn vị pháp tuyến N và tôi nhân nó với chiều dài của vector pháp tuyến khác N lớn? Vâng, tôi lại nhận được N lớn. Đây là vector pháp tuyến cùng chiều dài như N, vâng, cùng với dấu. Điều duy nhất tôi không biết là liệu thằng này sẽ cùng hướng với N lớn hay ngược hướng. Giả sử rằng, N lớn có, tôi không biết, chiều dài bằng ba chẳng hạn. Thế thì vector đơn vị pháp tuyến có thể là thằng này, trong trường hợp đó thực sự ba nhân n nhỏ sẽ bằng n lớn.

Or it might be this one in which case three times little n will be negative big N. But up to sign it is N. And then I will have N over N dot k delta A. And so the final formula, the one that we care about in case you don't really like my explanations of how we get there, is that N dS is plus or minus N over N dot k dx dy. That one is actually kind of useful so let's box it. Now, just in case you are wondering, of course, if you didn't want to project to x, y, you would have maybe preferred to project to say the plane of a blackboard, y, z, well, you can do the same thing. To express n dS in terms of dy dz you do the same argument.
Hoặc có thể là cái này trong trường hợp ba nhân n nhỏ sẽ bằng trừ N lớn. Nhưng thêm dấu nó là N. Và sau đó tôi sẽ có N trên N dot k delta A. Và như vậy công thức cuối cùng, cái mà chúng ta quan tâm trong trường hợp bạn thực sự không thích cách giải thích của tôi về cách đến được đó, là N dS bằng cộng hoặc trừ N trên N dot k dx dy. Cái đó có thể là có ích vì vậy hãy đóng khung nó. Bây giờ, trong trường hợp bạn thắc mắc, tất nhiên,nếu bạn không muốn chiếu lên x, y, bạn sẽ phải chiếu lên mặt phẳng bảng đen, y, z, vâng, bạn có thể làm tương tự. Để biểu diễn n dS theo  dy dz bạn lí luận tương tự.

Simply, the only thing that changes, instead of using the vertical vector k, you use the normal vector i. So you would be doing N over N dot i dy dz. The same thing. So just keep an open mind that this also works with other variables. Anyway, that is how you can basically project the vectors of this area element onto the x, y plane in a way. Let's look at the special case just to see how this fits with stuff we have seen before.

Đơn giản, thứ duy nhất thay đổi, thay vì sử dụng vector thẳng đứng k, bạn sử dụng vector pháp tuyến i. Vì vậy, bạn sẽ thực hiện N trên N dot i dy dz. Tương tự. Vì vậy, chỉ cần nhớ rằng điều này cũng đúng với các biến khác. Dù sao đi nữa, đó là cách bạn chiếu các vector của yếu tố diện tích này trên mặt phẳng x, y theo cách nào đó. Hãy xét trường hợp đặc biệt chỉ để xem điều này phù hợp với các thứ mà chúng ta đã thấy từ trước như thế nào.

Let's do a special example where our surface is given by the equation z minus f of x, y equals zero. That is a strange way to write the equation. z equals f of x, y. That we saw before. But now it looks like some function of x, y, z equals zero. Let's try to use this new method. Let's call this guy g(x, y, z). Well, now let's look at the normal vector. The normal vector would be the gradient of g, you see. What is the gradient of this function? The gradient of g –

Hãy xét một ví dụ đặc biệt trong đó bề mặt được cho bởi phương trình z bằng trừ f của x,y bằng không. Đó là một cách kỳ lạ để viết phương trình. z bằng f của x, y. Điều này chúng ta đã thấy từ trước. Nhưng bây giờ nó giống như hàm nào đó của x, y, z bằng không. Hãy thử dùng phương pháp mới này. Hãy gọi thằng này là g (x, y, z). Vâng, bây giờ chúng ta xét vector pháp tuyến. Vector pháp tuyến sẽ là gradient của g, bạn thấy không. Gradient của hàm này là gì? Gradient của g -

Well, partial g, partial x, that is just negative partial f, partial x. The y component, partial g, partial y is going to be negative f sub y, and g sub z is just one. Now, if you take N over N dot k dx dy, well, it looks like it is going to be negative f sub x, negative f sub y, one divided by -- Well, what is N dot k? If you dot that with k you will get just one, so I am not going to write it, dx dy. See, that is again our favorite formula. This one is actually more general because you don't need to solve for z, but if you cannot solve for z then it is the same as before.

Vâng, đạo hàm riêng của g theo x, đó chỉ là trừ đạo hàm riêng của f theo x. Thành phần y, đạo hàm riêng của g theo y sẽ là trừ f y, và g z bằng một. Bây giờ, nếu bạn lấy N trên N dot k dx dy, vâng, có vẻ như nó là trừ f x, trừ f y, một chia cho - Vâng, N dot k là gì? Nếu bạn dot cái đó với k bạn sẽ nhận được kết quả là một, vì vậy tôi sẽ không viết nó, dx dy. Thấy không, đó lại là công thức yêu thích của tôi. Cái này thực sự tổng quát hơn bởi vì bạn cần giải tìm z, nhưng nếu bạn không thể giải tìm z thì nó giống như trước.

I think that is enough formulas for n dS. After spending a lot of time telling you how to compute surface integrals, now I am going to try to tell you how to avoid computing them. And that is called the divergence theorem. And we will see the proof and everything and applications on Tuesday, but I want to at least the theorem and see how it works in one example. It is also known as the Gauss-Green theorem or just the Gauss theorem, depending in who you talk to.

Tôi nghĩ rằng đó là công thức đầy đủ cho n dS. Sau khi sử dụng nhiều thời gian để chỉ cho bạn cách tính các tích phân mặt, bây giờ tôi lại chỉ cho bạn cách tránh tính chúng. Và đó được gọi là định lý divergence. Và chúng ta sẽ thấy cách chứng minh và mọi thứ và các ứng dụng vào thứ ba, nhưng ít nhất tôi muốn phát biểu định lí và xét nó qua một ví dụ. Nó còn được gọi là định lý Gauss-Green hoặc chỉ định lý Gauss, tùy thuộc vào người bạn nói chuyện.

The Green here is the same Green as in Green's theorem, because somehow that is a space version of Green's theorem. What does it say? It is 3D analog of Green for flux. What it says is if S is a closed surface -- Remember, it is the same as with Green's theorem, we need to have something that is completely enclosed. You have a surface and there is somehow no gaps in it. There is no boundary to it. It is really completely enclosing a region in space that I will call D.

Green ở đây giống như Green trong định lý Green, bởi vì đó là phiên bản không gian của định lí Green. Nội dung của nó là gì? Đó là định lí Green cho thông lượng trong trường hợp ba chiều. Nội dung là nếu S là bề mặt khép kín - Hãy nhớ rằng, nó giống như với định lí Green, chúng ta cần có cái gì đó hoàn toàn khép kín. Bạn có bề mặt và không có khe trong nó. Nó không có biên. Nó hoàn toàn đóng kín một vùng trong không gian mà tôi sẽ gọi là D.

And I need to choose my orientation. The orientation that will work for this theorem is choosing the normal vector to point outwards. N needs to be outwards. That is one part of the puzzle. The other part is a vector field. I need to have a vector field that is defined and differentiable -- -- everywhere in D, so same instructions as usual. Then I don't have actually to compute the flux integral. Double integral of f dot n dS of a closed surface S.
Và tôi cần phải chọn sự định hướng của tôi. Sự định hướng áp dụng cho định lí này là chọn vector pháp tuyến hướng ra ngoài. N cần hướng ra ngoài. Đó là một phần của câu đố. Phần còn lại là trường vector. Tôi cần phải có một trường vectơ xác định và khả vi - - ở khắp mọi nơi trong D, do đó, các hướng dẫn tương tự như bình thường. Thế thì tôi thực sự không cần tính tích phân thông lượng. Tích phân kép của f dot n dS của một bề mặt kín S.

I am going to put a circle just to remind you it is has got to be a closed surface. It is just a notation to remind us closed surface. I can replace that by the triple integral of a region inside of divergence of F dV. Now, I need to tell you what the divergence of a 3D vector field is. Well, you will see that it is not much harder than in the 2D case. What you do is just -- Say that your vector field has components P, Q and R. Then you will take P sub x Q sub y R sub z. That is the definition. It is pretty easy to remember. You take the x component partial respect to S plus partial respect to y over y component plus partial respect to z of the z component.
Tôi sẽ đặt một vòng tròn chỉ để nhắc nhở bạn nó là một bề mặt kín. Nó chỉ là một ký hiệu để nhắc nhở chúng ta một bề mặt kín. Tôi có thể thay thế cái đó bằng tích phân ba lớp của một vùng bên trong divergence của F dV. Bây giờ, tôi cần phải cho bạn biết divergence của trường vector ba chiều là gì. Vâng, bạn sẽ thấy rằng nó không khó hơn nhiều so với trường hợp hai chiều. Những gì bạn làm là chỉ cần – giả sử rằng trường vector của bạn có các thành phần P, Q và R. Thế thì tôi sẽ lấy P x Q y R z. Đó là định nghĩa. Nó khá dễ nhớ. Bạn lấy đạo hàm riêng thành phần x theo S cộng đạo hàm riêng theo y trên thành phần y cộng đạo hàm riêng theo z của thành phần z.

For example, last time we saw that the flux of the vector field zk through a sphere of radius a was four-thirds pi a cubed by computing the surface integral. Well, if we do it more efficiently now by Green's theorem, we are going to use Green's theorem for this sphere because we are doing the whole sphere. It is fine. It is a closed surface. We couldn't do it for, say, the hemisphere or something like that. Well, for a hemisphere we would need to add maybe the flat face of a bottom or something like that.

Ví dụ, lần trước chúng ta đã thấy rằng thông lượng của trường vector zk qua một mặt cầu bán kính a bằng bốn phần ba pi a mũ ba bằng cách tính tích phân mặt . Vâng, nếu chúng ta làm nó hiệu quả hơn bây giờ bằng định lý Green, chúng ta sẽ sử dụng định lý Green cho hình cầu này bởi vì chúng ta đang làm toàn bộ mặt cầu. Tốt. Nó là một bề mặt kín. Chúng ta không thể làm điều đó cho, giả sử, bán cầu hoặc một cái gì đó như thế. Vâng, đối với bán cầu chúng ta cần thêm một mặt phẳng bên dưới hoặc thứ gì đó

.

Green's theorem says that our flux integral can actually be replaced by the triple integral over the solid bowl of radius a of the divergence of zk dV. But now what is the divergence of this field? Well, you have zero, zero, z so you get zero plus zero plus one. It looks like it will be one. If you do the triple integral of 1dV, you will get just the volume -- -- of the region inside, which is four-thirds by a cubed. And so it was no accident. In fact, before that we looked at also xi yj zk and we found three times the volume.
Định lý Green nói rằng tích phân thông lượng thực sự có thể được thay bằng tích phân ba lớp của divergence zk dV trên một cái bát rắn bán kính a. Nhưng bây giờ divergence của trường này là gì? Vâng, bạn có không, không, z vì vậy bạn nhận được không cộng không cộng một. Bằng một. Nếu bạn tính tích phân ba lớp của 1dV, bạn sẽ nhận được thể tích -- của vùng bên trong, đó là bốn phần ba của a mũ ba. Và do đó, nó không ngẫu nhiên. Trong thực tế, trước đó chúng ta cũng xét xi yj zk và chúng ta tìm được ba nhân thể tích.

That is because the divergence of that field was actually three. Very quickly, let me just say what this means physically. Physically, see, this guy on the left is the total amount of stuff that goes out of the region per unit time. I want to figure out how much stuff comes out of there. What does the divergence mean? The divergence means it measures how much the flow is expanding things. It measures how much, I said that probably when we were trying to understand 2D divergence.
Đó là bởi vì divergence của trường đó thực sự bằng ba. Rất nhanh, hãy để tôi nói ý nghĩa vật lí của cái này. Về mặt vật lí, xem nào, thằng này ở phía trái là tổng lượng vật chất đi ra ngoài vùng trên một đơn vị thời gian. Tôi muốn tìm ra có bao nhiêu vật chất đi ra ngoài đó. Divergence có nghĩa là gì? Divergence đo dòng chảy mở rộng các thứ bao nhiêu. Nó đo bao nhiêu, có lẽ tôi đã nói điều đó rồi từ hồi chúng ta học divergence hai chiều.

It measures the amount of sources or sinks that you have inside your fluid. Now it becomes commonsense. If you take a region of space, the total amount of water that flows out of it is the total amount of sources that you have in there minus the sinks. I mean, in spite of this commonsense explanation, we are going to see how to prove this. And we will see how it works and what it says.
Nó đo tổng số lượng các nguồn hoặc các hõm mà bạn có bên trong chất lỏng. Bây giờ nó sẽ trở thành cảm giác chung chúng. Nếu bạn chọn một vùng không gian, tổng lượng nước chảy ra ngoài nó là tổng số lượng các nguồn bạn có trong ba phút các hõm.Ý tôi là, mặc cho giải thích chung chung này, chúng ta sẽ thấy cách chứng minh cái này. Và chúng ta sẽ thấy quy luật của nó và nội dung của nó.