18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 27

Trường vectơ trong không gian ba chiều; tích phân mặt và thông lượng
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

-- new stuff to cover today. Just before I do that, I wanted to point out that there is a new problem set. And, good news, it is not due for a couple of weeks. But it is kind of long. It is not twice the length of usual ones, but it is a bit longer than usual. So don't want until the last moment, please. Actually, you can do most of it before Thanksgiving break. We are going to continue to look at stuff in space. We have been working with triple integrals and seeing how to set them up in all sorts of coordinate systems. And the next topic we will be looking at are vector fields in space.
- Hôm nay chúng ta chuyển sang chủ đề mới. Trước khi bắt đầu, tôi muốn thông báo vừa có một xấp bài tập mới. Và, tin tốt, hạn nộp không phải là vài tuần. Mà khá lâu. Không lâu hơn hai lần hạn nộp thông thường, nhưng hạn nộp dài hơn bình thường một chút. Vì vậy, xin đừng chờ đến lúc cuối mới làm. Thực sự, bạn có thể làm gần như toàn bộ trước ngày lễ tạ ơn. Chúng ta sẽ tiếp tục xét các đối tượng trong không gian. Chúng ta đã khảo sát tích phân ba lớp và cách tính chúng trong mọi hệ tọa độ. Và chủ đề tiếp theo chúng ta sẽ xét là các trường vector trong không gian.

And so, in particular, we will be learning about flux and work. So, just for a change, we will be starting with flux first. And we will do work, actually, after Thanksgiving. Just to remind you, a vector field in space is just the same thing as in the plane. At every point you have a vector, and the components of this vector depend on the coordinates x, y and z. Let's say the components might be P, Q, R, or your favorite three letters, where each of these things is a function of coordinates x, y, z.
Và như vậy, đặc biệt, chúng ta sẽ học về thông lượng và công. Vì vậy, để thay đổi một chút, chúng ta sẽ bắt đầu với thông lượng trước. Và chúng ta sẽ học công, sau ngày lễ tạ ơn. Nhớ rằng, một trường vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng. Tại mỗi điểm bạn có một vector, và các thành phần của vector này phụ thuộc vào tọa độ x, y và z. Giả sử rằng các thành phần có thể là P, Q, R, hoặc ba chữ cái yêu thích nào đó của bạn, trong đó mỗi thành phần lại là hàm của x, y, z.

You have seen that in the plane it is already pretty hard to draw a vector field. Usually, in space, we won't really try too hard. But it is still useful to try to have a general idea for what the vectors in there are doing, whether they are all going in the same direction, whether they may be all vertical or horizontal, pointing away from the origin, towards it, things like that. But, generally-speaking, we won't really bother with trying to draw a picture because that is going to be quite hard. Just to give you examples, well, the same kinds of examples as the plane, you can think of force fields. For example, the gravitational attraction –
Bạn đã thấy rằng trong mặt phẳng vẽ một trường vector đã là khó rồi. Thông thường, trong không gian, chúng ta sẽ không vẽ nó. Nhưng vẫn rất hữu ích để có một ý tưởng chung về các vector trong không gian, chúng sẽ đi theo cùng hướng, hay tất cả đi theo phương thẳng đứng hoặc ngang, hướng ra xa gốc tọa độ, hướng đến nó, các thứ giống như thế. Tuy nhiên, nói chung, chúng ta sẽ không thực sự bận tâm đến việc vẽ hình bởi vì việc đó khá khó. Ví dụ như, vâng, các loại ví dụ tương tự như mặt phẳng, bạn có thể nghĩ về các trường lực. Ví dụ, sức hút hấp dẫn -

-- of a solid mass, let's call this mass big M, at the origin on a mass M at point x, y, z. That would be given by a vector field that points toward the origin and whose magnitude is inversely proportional to the square of a distance from the origin. Such a field would be directed towards the origin and its magnitude would be of the order of a constant over pho squared where pho is the distance from the origin.
- của một vật rắn có khối lượng, hãy gọi khối lượng này là M lớn, tại gốc tọa độ với khối lượng M tại điểm x, y,z. Nó sẽ được cho bởi một trường vectơ hướng về gốc tọa độ và độ lớn của nó tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ gốc tọa độ. Một trường như thế sẽ hướng về gốc tọa độ và độ lớn của nó vào cỡ hằng số trên pho bình ở đây pho là khoảng cách từ gốc tọa độ.

The picture, if I really wanted to draw a picture, would be everywhere it is a field that points towards the origin. And if I am further away then it gets smaller. And, of course, I am not going to try to draw all these vectors in there. If I wanted to give a formula for that -- A formula for that might be something of a form minus c times x, y, z over pho cubed. Let's see. Well, the direction of this vector, this vector is proportional to negative x, y, z. < x, y, z> is the vector that goes from the origin to your point.
Hình vẽ, nếu tôi thực sự muốn vẽ hình, ở khắp mọi nơi nó là một trường hướng về gốc tọa độ. Và nếu tôi đi càng xa hơn thì nó trở nên nhỏ hơn. Và, tất nhiên, tôi sẽ không cố vẽ tất cả các vector này ở đó. Nếu tôi muốn đưa ra một công thức cho cái đó – công thức cho nó có thể là cái gì đó có dạng c nhân x, y, z trên pho mũ ba. Xem nào. Vâng, hướng của vector này, vector này tỷ lệ với trừ x, y, z. <x, y, z> là vector mà đi từ gốc tọa độ đến điểm của bạn.

The negative goes towards the origin. Then the magnitude of this guy, well, the magnitude of x, y, z is just the distance from the origin rho. So the magnitude of this thing is one over rho cubed times some constant factor. That would be an example of a vector field that comes up in physics. Well, other examples would be electric fields. Actually, if you look at the electric field generated by a charged particle at the origin, it is given by exactly the same kind of formula, and there are magnetic fields

Trừ hướng về gốc tọa độ. Thế thì độ lớn của thằng này, vâng, độ lớn của x, y, z là khoảng cách từ gốc tọa độ rho. Vì vậy độ lớn của cái này là một trên rho mũ ba nhân hệ số hằng số nào đó. Đó sẽ là một ví dụ của một trường vector xuất hiện trong vật lý. Vâng, ví dụ khác sẽ là trường điện. Trên thực tế, nếu bạn xét trường điện được tạo ra bởi một điện tích được đặt tại gốc tọa độ, nó được cho bởi cùng một loại công thức, và có các trường từ and so on. Another example comes from velocity fields. If you have a fluid flow, for example, if you want to study wind patterns in the atmosphere.

và v.v… Một ví dụ khác là trường vận tốc. Nếu bạn có một dòng chất lỏng, ví dụ, nếu bạn muốn nghiên cứu biên dạng gió trong khí quyển.

Well, wind, most of the time, is kind of horizontal, but maybe it depends on the altitude. At high altitude you have jet streams, and the wind velocity is not the same at all altitudes. And, just to give you more examples, in math we have seen that the gradient of a function of three variables gives you a vector field. If you have a function u of x, y, z then its gradient field has just components, u sub x, u sub y and u sub z. And, of course, the cases are not mutually exclusive. For example, the electric field or gravitational field is given by the gradient of the gravitational or electric potential. So, these are not like different cases. There is overlap.

Vâng, gió, hầu như mọi lúc, là loại nằm ngang, nhưng có lẽ nó phụ thuộc vào độ cao. Tại độ cao, bạn có các dòng khí, và vận tốc gió không giống nhau ở tất cả các độ cao. Và, để cho bạn thêm ví dụ, trong toán học chúng ta đã thấy rằng gradient của một hàm ba biến cho bạn một trường vector. Nếu bạn có một hàm u x, y, z thì trường gradient của nó có các thành phần, u x, u y và u z. Và, tất nhiên, các trường hợp không loại trừ lẫn nhau. Ví dụ, điện trường hoặc trường hấp dẫn được cho bởi gradient của thế hấp dẫn hoặc tĩnh điện. Vâng, những cái này không giống các trường hợp khác. Chúng xen phủ.

Anyway, hopefully, you are kind of convinced that you should learn about vector fields. What are we going to do with them? Well, let's start with flux. Remember not so long ago we looked at flux of a two-dimensional field of a curve. We had a curve in the plane and we had a vector field. And we looked at the component of a vector field in the direction that was normal to the curve. We formed the flux integral that was a line integral F dot n ds.

Dù sao đi nữa, hy vọng, bạn đã bắt đầu nhận ra rằng bạn nên học các trường vector. Chúng ta sẽ làm gì với chúng? Vâng, chúng ta hãy bắt đầu với thông lượng. Hãy nhớ rằng không giống như trước chúng ta xét thông lượng của trường hai chiều của một đường cong. Chúng ta có một đường cong trong mặt phẳng và chúng ta có một trường vectơ. Và chúng ta đã xét các thành phần của một trường vector theo hướng vuông góc với đường cong. Chúng ta đã thành lập thông lượng chính là tích phân đường F dot n ds (dot : nhân vô hướng) .

And that measured how much the vector field was going across the curve. If you were thinking of a velocity field, that would measure how much fluid is passing through the curve in unit time. Now let's say that we were in space. Well, we cannot really think of flux as a line integral. Because, if you have a curve in space and say that you have wind or something like that, you cannot really ask how much air is flowing through the curve.

Và nó đo trường vector sẽ đi qua đường cong nhiều bao nhiêu. Nếu bạn đang nghĩ đến một trường vận tốc, nó sẽ đo chất lỏng đi qua đường cong trong một đơn vị thời gian nhiều bao nhiêu. Bây giờ giả sử rằng chúng ta ở trong không gian. Vâng, chúng ta không thể xem thông lượng như tích phân đường. Bởi vì, nếu bạn có một đường cong trong không gian và giả sử rằng bạn có gió hay thứ gì đó tương tự, bạn không thể hỏi có bao nhiêu gió thổi qua đường cong.

See, to have a flow through something you need a surface. If you have a net maybe then you can ask how much stuff is passing through that surface. There is going to be a big difference here. In the three-dimensional space, flux will be measured through a surface. And so it will be a surface integral, not a line integral anymore. That means we will be integrating, we will be summing over all the pieces of a surface in space.

Xem nào, để có dòng chảy qua cái gì đó bạn cần có một bề mặt. Nếu bạn có một lưới thì bạn có thể hỏi có bao nhiêu thứ đi qua bề mặt đó. Có một sự khác biệt lớn ở đây. Trong không gian ba chiều, thông lượng sẽ được đo qua một bề mặt. Và do đó, nó sẽ là tích phân mặt, không phải tích phân đường nữa. Điều đó có nghĩa là chúng ta sẽ lấy tích phân, chúng ta sẽ lấy tổng trên tất cả các mảnh của của một bề mặt trong không gian.

Because a surface is a two-dimensional object, that will end up being a double integral. But, of course, we will have to set it up properly because the surface that is in space, and we will probably have x, y and z to deal with at the same time, and we will have to somehow get rid of one variable so that we can set up and evaluate a double integral. So conceptually it is very similar to line integrals. In the line integral in the plane, you had two variables that you reduced to one by figuring out what the curve was. Here you have three variables that you will reduce to two by figuring out what the surface is.
Bởi vì bề mặt là một đối tượng hai chiều, nó sẽ ra một tích phân kép. Nhưng, tất nhiên, chúng ta sẽ phải thiết lập nó thích hợp bởi vì bề mặt đó ở trong không gian, và chúng ta sẽ có thể có x, y và z để xét cùng một lúc, và bằng cách nào đó chúng ta sẽ phải bỏ đi một biến để chúng ta có thể thiết lập và tính tích phân kép. Vì vậy, về mặt khái niệm nó rất giống với các tích phân đường. Trong tích phân đường trong mặt phẳng, bạn có hai biến rồi bạn rút về một biến bằng cách chỉ ra đường cong là gì. Ở đây bạn có ba biến bạn phải rút về hai biến bằng cách chỉ ra bề mặt là gì.

Let me give you a definition of flux in 3D. Let's say that we have a vector field and s, a surface in space. Let me draw some kind of a picture. I have my surface and I have my vector field F. Well, at every point it changes with a point. Well, I want to figure out how much my vector field is going across that surface. That means I want to figure out the normal component of my vector field, so I will use, as in the plane case, the unit normal vector to s.
Để tôi đưa ra một định nghĩa về thông lượng trong không gian 3 chiều. Giả sử rằng chúng ta có một trường vector và s, một bề mặt trong không gian. Hãy để tôi vẽ hình. Tôi có bề mặt của tôi và tôi có trường vector của tôi F. Vâng, tại mỗi điểm nó thay đổi theo từng điểm. Vâng, tôi muốn chỉ ra trường vector của tôi sẽ đi qua bề mặt nhiều như thế nào. Điều đó có nghĩa là tôi muốn chỉ ra thành phần pháp tuyến của trường vector, vì vậy tôi sẽ dùng, như trong trường hợp mặt phẳng, vector pháp tuyến đơn vị s.

I take my point on the surface and build a unit vector that is standing on it perpendicularly. Now, we have to decide which way it is standing. We can build our normal vector to go this way or to go the other way around. There are two choices. Basically, whenever you want to set up a flux integral you have to choose one side of

the surface. And you will count positively what flows toward that side and negatively what flows towards the other side. There are two choices for n. We need to choose a side of the surface. In the case of curves, we made that choice by deciding that because we were going along some direction on the curve we could choose one side by saying let's rotate clockwise from the tangent vector.
Tôi chọn một điểm trên bề mặt và tạo ra một vectơ đơn vị đứng vuông góc trên nó. Bây giờ, chúng ta phải quyết định xem nó đứng theo cách nào. Chúng ta có thể tạo ra vector pháp tuyến đi theo hướng này hoặc hướng kia. Có hai sự lựa chọn. Về cơ bản, bất cứ khi nào bạn muốn thiết lập một tích phân thông lượng bạn phải chọn một phía của bề mặt. Và bạn tính là dương cho những gì chảy về phía đó và âm cho những gì chảy về phía bên kia. Có hai sự lựa chọn cho n. Chúng ta cần phải chọn phía của bề mặt. Trong trường hợp của các đường cong, chúng ta đã thực hiện lựa chọn đó bằng cách quyết định rằng bởi vì chúng ta sẽ đi dọc theo hướng nào đó trên đường cong chúng ta có thể chọn một phía bằng nói rằng chúng ta sẽ quay cùng chiều kim đồng hồ từ vector tiếp tuyến.

And, in a way, what we were doing was really it was a recipe to choose for us one of the two sides. Here we don't have a notion of orienting the surface, other than by precisely choosing one of the two possible normal vectors. So, in fact, this is called choosing an orientation of a surface. When you are saying you are orienting the surface that really means you are deciding which side is which.
Và, thực sự là việc lựa chọn gần như theo công thức. Ở đây chúng ta không có khái niệm về định hướng bề mặt, khác với cách chọn chính xác một trong hai vector pháp tuyến kh ã dĩ. Vì vậy, cái này được gọi là sự lựa chọn định hướng bề mặt. Khi bạn nói rằng bạn định hướng bề mặt thực sự điều đó có nghĩa là bạn sẽ quyết định xem nó là mặt nào.

Let's call that orientation. Now, there is no set convention that will work forever. But the usually traditional settings would be to take your normal vector pointing maybe out of the solid region because then you will be looking at flux that is coming out of that region of space. Or, if you have a surface that is not like closed or anything but maybe you will want the flux going up through the region. Or, there are various conventions. Concretely, on problem sets it will either say which choice you have to make or you get to choose which one you want to make. And, of course, if you choose the other one then the sign becomes the opposite. Now, once we have made a choice then we can define the flux integral.
Hãy gọi đó là định hướng. Bây giờ, không có tập hợp quy ước nào sẽ đúng mãi mãi. Tuy nhiên, cách thiết lập truyền thống sẽ là chọn vector pháp tuyến hướng ra ngoài vùng vật rắn bởi vì sau đó bạn sẽ xét thông lượng ra khỏi vùng không gian đó. Hoặc, nếu bạn có một bề mặt không khép kín hoặc bất cứ cái gì nhưng có thể bạn sẽ muốn có thông lượng đi qua vùng. Hoặc, có những quy ước khác nhau. Cụ thể, trên các xấp bài tập hoặc là cho trước cái nào để bạn phải chọn hoặc là bạn chọn cái nào bạn muốn. Và, tất nhiên, nếu bạn chọn cái kia thì dấu sẽ ngược lại. Bây giờ, khi chúng ta đã chọn thì chúng ta có thể định nghĩa tích phân thông lượng.

It will just be the double integral over a surface of F dot n dS. Now I am using a big dS. That stands for the surface area element on this surface. I am using dS rather than dA because I still want to think of dA as maybe the area in one of the coordinate planes like the one we had in double integrals. You will see later where this comes in. But conceptually it is very similar. Concretely what this means is I cut my surface into little pieces. Each of them has area delta S. And, for each piece, I take my vector field, I take my normal vector, I dot them and I multiply by this surface area and sum all these things together. That is what a double integral means.
Nó chỉ sẽ là tích phân kép của F dot dS n trên một bề mặt. Bây giờ tôi đang dùng dS lớn. Nó biểu diễn yếu tố diện tích của bề mặt n ày. Tôi đang sử dụng dS chứ không phải dA vì tôi vẫn còn muốn xem dA là diện tích trong các mặt phẳng tọa độ giống như cái mà chúng ta đã có trong tích phân kép. Chút nữa, bạn sẽ thấy tại sao có cái này. Nhưng về mặt khái niệm, nó rất giống nhau. Cụ thể cái này có nghĩa là tôi cắt bề mặt của tôi thành những mảnh nhỏ. Mỗi cái có diện tích delta S. Và, đối với mỗi

mảnh, tôi chọn trường vector của tôi, tôi chọn vector pháp tuyến của tôi, tôi nhân vô hướng chúng với nhau và tôi nhân với diện tích bề mặt này và cộng tất cả những thứ này với nhau. Đó là tích phân kép.

In particular, an easy case where you know you can get away without computing anything is, of course, if your vector field is tangent to the surface because then you know that there is no flux. Flux is going to be zero because nothing passes through the surface. Otherwise, we have to figure out how to compute these things. That is what we are going to learn now. Well, maybe I should box this formula. I have noticed that some of you seem to like it when I box the important formulas. (APPLAUSE) By the way, a piece of notation before I move on, sometimes you will also see the notation vector dS. What is vector dS?
Đặc biệt, một trường hợp dễ mà bạn có thể loại bỏ mà không cần tính toán là, tất nhiên, nếu trường vector của bạn tiếp xúc với bề mặt bởi vì thế thì bạn biết rằng không có thông lượng. Thông lượng sẽ bằng không bởi vì không có gì đi qua bề mặt. Nếu không, chúng ta phải tìm ra cách tính những cái này. Đó là những gì chúng ta sẽ học bây giờ. Vâng, có lẽ tôi nên đóng khung công thức này. Tôi nhận thấy rằng một số bạn có vẻ thích nó khi tôi đóng khung các công thức quan trọng. Nhân đây, một chút về kí hiệu khi tôi chuyển chủ đề, đôi khi bạn cũng sẽ thấy ký hiệu vector dS. Vector dS là gì?

Vector dS is this guy n dS put together. Vector dS is a vector which points perpendicular to the surface and whose length corresponds to the surface element. And the reason for having this shortcut notation, well, it is not only laziness like saving one n, but it is because this guy is very often easier to compute than it is to set up n and dS separately. Actually, if you remember in the plane, we have seen that vector n little ds can be written directly as dy, - dx. That was easier than finding n and ds separately. And here the same is going to be true in many cases. Well, any questions before we do examples?
Vector dS là thằng này n dS đặt lại với nhau. Vector dS là một vector hướng vuông góc với bề mặt và chiều dài của nó tương ứng với yếu tố bề mặt. Và lý do có ký hiệu tắt này là, vâng, nó không chỉ là lười biếng tiết kiệm một chữ n, mà còn bởi vì thằng này thường dễ tính hơn so với khi thiết lập n và dS riêng. Thực sự, nếu bạn nhớ trong mặt phẳng, chúng ta đã thấy vector n nhỏ ds có thể được viết trực tiếp là dy, - dx. Điều đó dễ hơn tìm n và ds riêng biệt. Và ở đây điều tương tự sẽ đúng trong nhiều trường hợp. Vâng, trước khi chuyển sang các ví dụ có ai hỏi gì không?

No. OK. Let's do examples. The first example for today is we are going to look at the flux of vector field xi yj xk through the sphere of radius a -- -- centered at the origin. What does the picture look like? We have a sphere of radius a. I have my vector field. Well, <x, y, z>, see, that is a vector field that is equal to the vector from the origin to the point where I am, so it is pointing radially away from the origin.

Không. Được rồi. Hãy xét các ví dụ. Ví dụ đầu tiên cho ngày hôm nay là thông lượng của trường vector xi yj xk qua mặt cầu bán kính a - - tâm tại gốc tọa độ. Hình có dạng như thế nào? Chúng ta có một hình cầu bán kính a. Tôi có trường vector của tôi. Vâng, <x, y, z>, thấy không, đó là một trường vectơ ứng với vector từ gốc tọa độ đến điểm tôi đang đứng, vì vậy nó hướng tâm ra ngoài từ gốc tọa độ.

My vector field is really sticking out everywhere away from the origin. Now I have to find the normal vector to the sphere if I want to set up double integral over the sphere of F dot vector ds, or if you want F dot n dS. What does the normal vector to the sphere look like? Well, it depends, of course, whether I choose it pointing out or in. Let's say I am choosing it pointing out then it will be sticking straight out of a sphere as well.

Trường vector của tôi là thực sự đâm thẳng ra khắp mọi nơi từ gốc tọa độ. Bây giờ tôi phải tìm vector pháp tuyến của mặt cầu nếu tôi muốn thiết lập tích phân kép của F dot vector ds trên hình cầu, hoặc nếu bạn muốn F dot n dS. Vector pháp tuyến của hình cầu có dạng thế nào? Vâng, nó phụ thuộc, tất nhiên, cho dù tôi chọn nó hướng ra hoặc hướng vào. Giả sử rằng tôi chọn nó hướng ra thì nó cũng sẽ đâm thẳng ra ngoài hình cầu nữa.

Hopefully, you can see that if I take a normal vector to the sphere it is actually pointing radially out away from the origin. In fact, our vector field and our normal vector are parallel to each other. Let's think a bit more about what a normal vector looks like. I said it is sticking straight out. It is proportional to this vector field. Maybe I should start by writing <x, y z> because that is the vector that goes from the origin to my point so it points radially away from the origin. Now there is a small problem with that. It is not a unit vector. So what is its length? Well, its length is square root of x^2 y^2 z^2. But, if I am on the sphere, then that length is just equal to a because distance from the origin is a. In fact, I get my normal vector by scaling this guy down by a factor of a.

Hy vọng rằng, bạn có thể thấy rằng nếu tôi chọn vector pháp tuyến của hình cầu nó sẽ thực sự hướng tâm ra ngoài từ gốc tọa độ. Quả thực, trường vector của tôi và vector pháp tuyến của tôi song song nhau. Hãy nghĩ thêm một chút về dạng của vector pháp tuyến. Tôi nói nó đâm thẳng ra ngoài. Nó tỉ lệ với trường vector này. Có lẽ tôi nên bắt đầu bằng cách viết <x, y,z> vì đó là vector đi từ gốc tọa độ đến điểm của tôi vì vậy nó hướng tâm ra xa từ gốc tọa độ. Bây giờ có một vấn đề nhỏ với điều đó. Nó không phải là một vectơ đơn vị. Vậy chiều dài của nó là gì? Vâng, chiều dài của nó là căn hai của x^2 y^2 z^2. Nhưng, nếu tôi ở trên mặt cầu, thì chiều dài đó chính là a bởi vì khoảng cách từ gốc tọa độ là a. Quả thực, tôi nhận được vector pháp tuyến của tôi bằng cách lấy tỉ lệ thằng này xuống một hệ số a.

And let me write it down just in case you are still unsure. This is unit because square root of x^2 y^2 z^2 is equal to a on the sphere. OK. Any questions about this? No. It looks OK? I see a lot of blank faces. That physics test must have been hard. Yes? I could have put a rho but I want to emphasize the fact that here it is going to be a constant. I mean rho has this connotation of being a variable that I will need to then maybe integrate over or do something with. Yes, it would be correct to put rho but I then later will want to replace it by its actual value which is a number.

Và hãy để tôi viết ra trong trường hợp bạn vẫn chưa chắc chắn. Đây là đơn vị bởi vì căn bậc hai của x^2 y^2 z^2 bằng a trên mặt cầu. Vâng. Có bất cứ câu hỏi nào về điều này không? Không. Có vẻ ổn? Tôi thấy nhiều người vắng. Bài kiểm tra vật lí chắc khó lắm. Xin mời? Tôi có thể đặt rho nhưng tôi muốn nhấn mạnh việc ở đây nó sẽ là hằng số. Ý tôi là rho cũng có thể là một biến mà tôi sẽ cần để sau đó lấy tích phân hoặc làm cái gì đó. Vâng, đặt rho sẽ chính xác nhưng sau đó tôi sẽ muốn thay thế nó bằng giá trị thực sự của nó là một số.

And the number is a. It is not going to actually change from point to point. For example, if this was the unit sphere then I would just put x, y, z. I wouldn't divide by

anything. Now let's figure out F dot n. Let's do things one at a time. Well, F and n are parallel to each other. F dot n, the normal component of F, is actually equal to the length of F. Well, times the length of n if you want, but that is going to be a one since F and n are parallel to each other. And what is the magnitude of F if I am on the sphere? Well, the magnitude of F in general is square root of x^2 y^2 z^2 on the sphere that is going be a.
Và số đó là a. Nó sẽ không thay đổi từ điểm này đến điểm khác. Chẳng hạn, nếu đây là hình cầu đơn vị thì tôi sẽ chỉ đặt x, y, z. Tôi sẽ không chia cho bất cứ thứ gì. Bây giờ hãy tìm F dot n. Chúng ta hãy làm mỗi lần một cái. Vâng, F và n song song với nhau. F dot n, thành phần pháp tuyến của F, thực sự bằng độ dài của F. Vâng, nhân độ dài của n nếu bạn muốn, nhưng nó sẽ bằng một vì F và n song song nhau. Và độ lớn của F là gì nếu tôi ở trên mặt cầu? Vâng, nói chung độ lớn của F bằng căn bậc hai của x ^ 2 y ^ 2 z ^ 2 trên mặt cầu sẽ bằng a.

The other way to do it, if you don't want to think geometrically like that, is to just to do the dot product x, y, z doted with x over a, y over a, z over a. You will be x^2 y^2 z^2 divided by a. That will simplify to a because we are on the sphere. See, we are already using here the relation between x, y and z. We are not letting x, y and z be completely arbitrary. But the slogan is everything happens on the surface where we are doing the integral. We are not looking at anything inside or outside. We are just on the surface.
Một cách khác để làm nó, nếu bạn không muốn xét về mặt hình học như thế này, là thực hiện tích vô hướng x, y, z với x trên a, y trên a, z trên a. Bạn sẽ được x ^ 2y ^ 2 z ^ 2 chia cho a. Nó sẽ được đơn giản hóa thành a bởi vì chúng ta ở trên mặt cầu. Xem nào, ở đây chúng ta sẽ dùng mối quan hệ giữa x, y và z. Chúng ta không cho phép x, y và z hoàn toàn tùy ý. Tuy nhiên, khẩu hiệu là tất cả mọi thứ xảy ra trên bề mặt ở đó chúng ta đang lấy tích phân. Chúng ta không xét bất cứ nơi đâu bên trong hoặc bên ngoài. Chúng ta chỉ xét trên bề mặt.

Now what do I do with that? Well, I have turned my integral into the double integral of a dS. And a is just a constant, so I am very lucky here. I can just say this will be a times the double integral of dS. And, of course, some day I will have to learn how to tackle that beast, but for now I don't actually need to because the double integral of dS just means I am summing the area of each little piece of the sphere. I am just going to get the total area of the sphere which I know to be 4pi a2.

Bây giờ tôi phải làm gì với điều đó? Vâng, tôi đã chuyển tích phân của tôi thành tích phân kép a dS. Và a chính là một hằng số, vì vậy tôi rất may mắn ở đây. Tôi có thể nói đây sẽ là a nhân tích phân kép của dS. Và, tất nhiên, một ngày nào đó tôi sẽ phải học cách giải quyết cái đáng ghét đó, nhưng bây giờ tôi không thực sự cần vì tích phân kép của dS chỉ có nghĩa là tôi sẽ cộng diện tích của mỗi mảnh nhỏ của mặt cầu. Tôi sẽ được diện tích của toàn bộ mặt cầu chính là bằng 4pi a2.

This guy here is going to be the area of S. I know that to be 4pi a^2. So I will get 4pi a^3. That one was relatively painless. That was too easy. Let's do a second example with the same sphere. But now my vector field is going to be just z times k. Well, let me give it a different name. Let me call it H instead of f or something like that just so that it is not called F anymore. Well, the initial part of the setup is still the same. The normal vector is still the same. What changes is, of course, my vector field is no longer sticking straight out so I cannot use this easy geometric argument.

Thẳng này ở đây sẽ là diện tích của S. Tôi biết nó là 4pi a ^ 2. Vì vậy, tôi sẽ được 4pi a^3. Cái đó tương đối dễ chịu. Nó quá dễ dàng. Hãy xét một ví dụ thứ hai với mặt cầu tương tự. Nhưng bây giờ trường vector của tôi sẽ chỉ là z nhân k. Vâng, hãy để tôi đặt cho nó một tên khác. Hãy để tôi gọi nó là H thay vì F hay cái gì đó tương tự thế sao cho nó không còn được gọi là F nữa. Vâng, phần ban đầu của thiết lập vẫn là như nhau. Vector pháp tuyến vẫn tương tự. Những gì thay đổi là, tất nhiên, trường vector của tôi không còn đâm thẳng ra ngoài vì vậy tôi không thể dùng lí luận hình học đơn giản này.

It looks like I will have to compute F dot n and then figure out how to integrate that with dS. Let's do that. We still have that n is <x, y, z>/a. That tells us that H dot n will be <0, 0, z> dot <x, y, z> / a. It looks like I will be left with z^2 over a. H dot n is z^2 over a. The double integral for flux now becomes double integral on the sphere of z^2 over a dS. Well, we can take out one over a, that is fine, but it looks like we will have to integrate z^2 on the surface of the sphere. How do we do that? Well, we have to figure out what is dS in terms of our favorite set of two variables that we will use to integrate. Now, what is the best way to figure out where you are on the sphere? Well, you could try to use maybe theta and z.

Dường như tôi sẽ phải tính F dot n và sau đó tìm ra cách để tính tích phân nó với dS. Hãy làm điều đó. Chúng ta vẫn có n bằng <x, y, z> / a. Điều đó cho chúng ta biết rằng H dot n sẽ là <0, 0, z> dot <x, y, z> / a. Có vẻ như tôi sẽ còn lại z ^ 2 trên a. H dot n bằng z ^ 2 trên a. Tích phân kép cho thông lượng bây giờ trở thành tích phân kép trên mặt cầu của z ^ 2 trên a dS. Vâng, chúng ta có thể đưa một trên a ra ngoài, điều đó tốt, nhưng có vẻ như chúng ta sẽ phải tính tích phân z ^ 2 trên bề mặt của hình cầu. Chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, chúng ta phải chỉ ra dS theo tập hợp hai biến mà chúng ta sẽ dùng để lấy tích phân là gì. Bây giờ, cách tốt nhất để xác định vị trí của bạn trên mặt cầu là gì? Vâng, bạn có thể thử sử dụng theta và z.

If you know how high you are and where you are around, in principle you know where you are on the sphere. But since spherical coordinates we have actually learned about something much more interesting, namely spherical coordinates. It looks like longitude / latitude is the way to go when trying to figure out where you are on a sphere. We are going to use phi and theta. And, of course, we have to figure out how to express dS in terms of d phi and d theta. Well, if you were paying really, really close attention last time, you will notice that we have actually already done that. Last time we saw that if I have a sphere of radius a and I take a little piece of it that corresponds to small changes in phi and theta then we said that –

Nếu bạn biết bạn đang ở độ cao bao nhiêu và bạn quanh quẩn ở đâu, về nguyên tắc bạn biết bạn ở đâu trên mặt cầu. Nhưng sau khi học xong tọa độ trụ chúng ta đã học về một số thứ lí thú hơn nhiều, cụ thể là tọa độ cầu. Dường như kinh độ / vĩ độ là một cách để chỉ ra bạn ở đâu trên mặt cầu. Chúng ta sẽ sử dụng phi và theta. Và, tất nhiên, chúng ta phải tìm ra cách biểu diễn dS theo d phi và d theta. Vâng, nếu lần trước bạn đã chú ý kĩ, bạn sẽ thấy rằng thực sự chúng ta đã thực hiện nó. Lần trước chúng ta đã thấy rằng nếu tôi có một mặt cầu bán kính a và tôi lấy một mảnh nhỏ của nó tương ứng với những thay đổi nhỏ của phi và theta thì chúng ta đã nói rằng -

Well, we argued that this side here, the one that is going east-west was a piece of the circle that has a radius a sin phi because that is r, so that side is a sin phi delta theta. And the side that goes north-south is a piece of the circle of radius a corresponding to angle delta phi, so it is a delta phi. And so, just to get to the answer, we got dS equals a^2 sin phi d phi d theta. When we set up a surface integral on the surface of a sphere, most likely we will be using phi and theta as our

two variables of integration and dS will become this.
Vâng, chúng ta lí luận rằng cạnh này ở đây, đi theo hướng đông-tây là một phần của đường tròn có bán kính a sin phi bởi vì đó là r, vì vậy cạnh đó là a sin phi delta theta. Và cạnh đi theo hướng Bắc-Nam là một phần của đường tròn bán kính a tương ứng với góc delta phi, do đó, nó là a delta phi. Và như vậy, để có được câu trả lời, chúng ta được dS bằng a^ 2 sin phi d phi d theta. Khi chúng ta thiết lập tích phân mặt trên bề mặt hình cầu, rất có thể chúng ta sẽ sử dụng phi và theta như hai biến của chúng ta và dS sẽ trở thành cái này.

Now, it is OK to think of them as spherical coordinates, but I would like to encourage you not to think of them as spherical coordinates. Spherical coordinates are a way of describing points in space in terms of three variables. Here it is more like we are parameterizing the sphere. We are finding a parametric equation for the sphere using two variables phi and theta which happen to be part of the spherical coordinate system.
Bây giờ, xem chúng như các tọa độ cầu cũng được, nhưng tôi muốn khuyến khích bạn không xem chúng như các tọa độ cầu. Các tọa độ cầu là cách để mô tả các điểm trong không gian theo ba biến. Ở đây nó giống như chúng ta đang tham số hóa mặt cầu. Chúng ta sẽ tìm phương trình tham số của mặt cầu dùng hai biến phi và theta đồng thời là phần của hệ tọa độ cầu.

But, see, there is no rho involved in here. I am not using any rho ever, and I am not going to in this calculation. I have two variable phi and theta. That is it. It is basically in the same way as when you parameterize a line integral in the circle, we use theta as the parameter variable and never think about r. That being said, well, we are going to use phi and theta. We know what dS is. We still need to figure out what z is. There we want to think a tiny bit about spherical coordinates again. And we will know that z is just a cos phi. In case you don't quite see it, let me draw a diagram. Phi is the angle down from the positive z axes, this distance is a, so this distance here is a cos phi.

Nhưng, thấy không, không có rho liên quan ở đây. Tôi không sử dụng bất kỳ rho nào hết, và tôi sẽ không đến tính toán này. Tôi có hai biến phi và theta. Như vậy đó. Về cơ bản nó cũng giống như khi bạn tham số hóa tích phân đường trong đường tròn, chúng ta sử dụng theta như các biến tham số và không bao giờ nghĩ về r. Còn ở đây chúng ta dùng phi và theta. Chúng ta biết dS là gì. Chúng ta vẫn cần phải tìm ra z là gì. Ở đó chúng ta lại cần nghĩ một chút về các tọa độ cầu nữa. Và chúng ta biết rằng z chỉ là a cos phi. Trong trường hợp bạn không thấy được, hãy để tôi vẽ hình. Phi là góc đi xuống từ trục z dương, khoảng cách này là a, vì vậy khoảng cách này ở đây là a cos phi.

Now I have everything I need to compute my double integral. z^2 over a dS will become a double integral. z^2 becomes a^2 cos^2 phi over a times, ds becomes, a^2 sin phi d phi d theta. Now I need to set up bounds. Well, what are the bounds? Phi goes all the way from zero to pi because we go all the way from the north pole to the south pole, and theta goes from zero to 2pi. And, of course, I can get rid of some a's in there and take them out. Let's look at what number we get. First of all, we can take out all those a's and get a^3. Second, in the inner integral, we are integrating cos^2 phi sin phi d phi.
Bây giờ tôi đã có mọi thứ cần thiết để tính tích phân kép. z ^ 2 tr ên a dS sẽ trở thành một tích phân kép. z ^ 2 trở thành a^2 cos ^ 2 phi trên a nhân, ds trở thành, a^ 2 sin phi d phi d theta. Bây giờ tôi cần phải thiết lập các cận. Vâng, các cận là gì? Phi chạy từ không đến pi bởi vì chúng ta đi từ cực bắc đến cực nam, và theta đi từ không đến 2pi. Và, tất nhiên, tôi có thể bỏ một số a ở đó và đem chúng ra ngoài. Hãy xét xem chúng ta nhận được số nào. Trước hết, chúng ta có thể đem ra ngoài tất cả a này và được a^3. Thứ hai, trong tích phân bên trong, chúng ta sẽ lấy tích phân cos ^ 2 phi sin phi d phi.

I claim that integrates to cos3 up to some factor, and that factor should be negative one-third. If you look at cos3 phi and you take its derivative, you will get that guy with a negative three in front between zero and pi. And, while integrating over theta, we will just multiply things by 2pi. Let me add the 2pi in front. Now, if I evaluate this guy between zero and pi, well, at pi cos^3 is negative one, at zero it is one, I will get two-thirds out of this. I end up with four-thirds pi a^3. Sorry I didn't write very much because I am trying to save blackboard space. Yes?
Tôi nghĩ tích phân của cái đó là cos3 nhân hệ số nào đó, và hệ số đó là một phần ba. Nếu bạn xét cos3 phi và bạn lấy đạo hàm của nó, bạn sẽ nhận được thằng đó với trừ ba ở trước giữa không và pi. Và, khi lấy tích phân trên theta, chúng ta chỉ nhân các thứ với 2pi. Hãy để tôi thêm 2pi ở phía trước. Bây giờ, nếu tôi tính thằng này giữa không và pi, vâng, tại phi cos ^ 3 là trừ một, tại không nó bằng một, tôi sẽ được hai phần ba ngoài này. Tôi kết thúc với bốn phần ba pi a^3. Xin lỗi tôi đã không viết nhiều bởi vì tôi đang cố gắng tiết kiệm không gian bảng đen. Xin mời?

That is a very natural question. That looks a lot like somebody we know, like the volume of a sphere. And ultimately it will be. Wait until next class when we talk about the divergence theorem. I mean the question was is this related to the volume of a sphere, and ultimately it is, but for now it is just some coincidence. Yes? The question is there is a way to do it M dx plus N dy plus stuff like that? The answer is unfortunately no because it is not a line integral. It is a surface integral, so we need to have to variables in there. In a way you would end up with things like some dx dy maybe and so on. I mean it is not practical to do it directly that way because you would have then to compute Jacobians to switch from dx dy to something else.
Đó là một câu hỏi rất tự nhiên. Điều đó rất giống với cái gì đó mà chúng ta biết, như thể tích hình cầu. Và cuối cùng nó sẽ như vậy. Chờ cho đến khi buổi học tiếp theo khi chúng ta học về định lí divergence. Ý tôi là câu hỏi là cái này có liên quan đến thể tích hình cầu, và cuối cùng nó là, nhưng bây giờ nó chỉ là một sự trùng hợp ngẫu nhiên. Xin mời? Câu hỏi là có cách nào để làm điều đó như là M dx cộng N dy cộng thứ gì đó giống như thế kia không? Câu trả lời là không may là không có bởi vì nó không phải là tích phân đường. Nó là tích phân mặt, vì vậy chúng ta cần có các biến ở đó. Rồi cuối cùng bạn sẽ được các thứ như dx dy nào đó và v.v…... Ý tôi là làm nó trực tiếp theo cách đó là không thực tế vì bạn phải tính Jacobi để chuyển từ dx dy sang cái khác.

We are going to see various ways of computing it. Unfortunately, it is not quite as simple as with line integrals. But it is not much harder. It is the same spirit. We just use two variables and set up everything in terms of these two variables. Any other questions? No. OK. By the way, just some food for thought. Never mind. Conclusion of looking at these two examples is that sometimes we can use geometric. The first example, we didn't actually have to compute an integral. But most of the time we need to learn how to set up double integrals. Use geometry or you need to set up for double integral of a surface.

Chúng ta sẽ thấy nhiều cách khác nhau để tính nó. Thật không may, nó không hoàn toàn đơn giản như tích phân đường. Mà nó khó hơn nhiều. Đó là ý tưởng tương tự. Chúng ta chỉ sử dụng hai biến và thiết lập tất cả mọi thứ theo hai biến này. Có câu hỏi nào khác không? Không. Được rồi. Nhân đây, chỉ là một số thực phẩm cho tư duy. Không sao. Kết luận qua việc xét hai ví dụ này là đôi khi chúng ta có thể sử dụng hình học. Ví dụ đầu tiên, chúng ta đã không cần tính tích phân. Nhưng trong đa số các trường hợp chúng ta cần học cách thiết lập các tích phân kép. Sử dụng hình học hoặc bạn cần phải thiết lập tích phân kép của một bề mặt.

And so we are going to learn how to do that in general. As I said, we need to have two parameters on the surface and express everything in terms of these. Let's look at various examples. We are going to see various situations where we can do things. Well, let's start with an easy one. Let's call that number zero. Say that my surface S is a horizontal plane, say z equals a. When I say a horizontal plane, it doesn't have to be the entire horizontal plane. It could be a small piece of it. It could even be, to trick you, maybe an ellipse in there or a triangle in there or something like that.
Và như vậy chúng ta sẽ tìm hiểu cách làm điều đó nói chung. Như tôi đã nói, chúng ta cần phải có hai tham số trên bề mặt và biểu diễn mọi thứ theo chúng. Hãy xét các ví dụ khác. Chúng ta sẽ thấy các trường hợp khác nhau ở đó chúng ta có thể làm các thứ. Vâng, chúng ta hãy bắt đầu với cái dễ. Hãy gọi nó là ví dụ số không. Giả sử rằng bề mặt S của tôi là một mặt phẳng nằm ngang, giả sử là z bằng a. Khi tôi nói một mặt phẳng nằm ngang, nó không phải là toàn bộ mặt phẳng ngang. Nó có thể là một phần nhỏ của nó. Nó thậm chí có thể là, để lừa bạn, có thể là hình ellipse ở đó hoặc một tam giác ở đó hay cái gì tương tự thế.

What you have to recognize is my surface is a piece of just a flat plane, so I shouldn't worry too much about what part of a plane it is. Well, it will become important when I set up bounds for integration. But, when it comes to looking for the normal vector, be rest assured that the normal vector to a horizontal plane is just vertical. It is going to be either k or negative k depending on whether I have chosen to orient it pointing up or down.
Bạn phải biết bề mặt của tôi chỉ là một phần của mặt phẳng, vì vậy tôi sẽ không quan tâm nhiều đến việc nó là phần nào của mặt phẳng. Vâng, nó sẽ trở nên quan trọng khi tôi thiết lập các cận cho tích phân. Nhưng, khi đến phần tìm vector pháp tuyến, hãy yên tâm rằng vector pháp tuyến của mặt phẳng ngang là thẳng đứng. Nó là k hoặc trừ k phụ thuộc vào việc tôi chọn nó hướng lên hay xuống.

And which one I choose might depend on what I am going to try to do. The normal vector is just sticking straight up or straight down. Now, what about dS? Well, it is

just going to be the area element in a horizontal plane. It just looks like it should be dx dy. I mean if I am moving on a horizontal plane, to know where I am, I should know x and y. So dS will be dx dy. If I play the game that way, I have my vector field F. I do F dot n. That just gives me the z component which might involve x, y and z. x and y I am very happy with. They will stay as my variables. Whenever I see z, well, I want to get rid of it. That is easy because z is just equal to a. I just plug that value and I am left with only x and y, and I am integrating that dx dy.
Và tôi chọn cái nào có thể phụ thuộc vào những gì tôi dự định làm. Các vector pháp tuyến đâm thẳng lên hoặc thẳng xuống. Bây giờ, còn dS thì sao? Vâng, nó sẽ là yếu tố diện tích trong mặt phẳng ngang. Có vẻ như nó sẽ là dxdy. Ý tôi là nếu tôi di chuyển trên mặt phẳng ngang, để biết tôi ở đâu, tôi nên biết x và y. Vì vậy, dS sẽ là dx dy. Nếu tôi chơi trò chơi theo cách đó, tôi có trường vector F của tôi. Tôi tính F dot n. Điều đó chỉ mang lại cho tôi thành phần z có thể liên quan đến x, y và z. Tôi rất hài lòng với x và y. Chúng vẫn còn là biến của tôi. Bất cứ khi nào tôi thấy z, vâng, tôi cần bỏ nó. Điều đó dễ bởi vì z bằng a. Tôi chỉ cần thế giá trị đó và tôi chỉ còn lại x và y, và tôi lấy tích phân dx dy.

It is actually ending up being just a usual double integral in x, y coordinates. And, of course, once it is set up anything is fair game. I might want to switch to polar coordinates or something like that. Or, I can set it up dx dy or dy dx. All the usual stuff applies. But, for the initial setup, we are just going to use these and express everything in terms of x and y. A small variation on that. Let's say that we take vertical planes that are parallel to maybe the blackboard plane, so parallel to the yz plane. That might be something like x equals some constant. Well, what would I do then? It could be pretty much the same.
Cuối cùng nó chỉ là tích phân kép thông thường của các tọa độ x, y. Và, tất nhiên, một khi nó được thiết lập bất cứ điều gì là trò chơi công bằng. Có thể tôi muốn chuyển sang tọa độ cực hoặc thứ gì đó tương tự. Hoặc, tôi có thể thiết lập nó là dx dy hoặc dy dx. Tất cả các thứ thông thường đều có thể áp dụng được. Nhưng, đối với thiết lập ban đầu, chúng ta sẽ chỉ sử dụng những cái này và biểu diễn mọi thứ theo x và y. Một biến thể nhỏ trên đó. Giả sử rằng chúng ta chọn các mặt phẳng thẳng đứng song song với mặt phẳng bảng đen, song song với mặt phẳng yz. Nó có thể là thứ gì đó có dạng x bằng hằng số. Vâng, tôi sẽ làm gì? Nó có thể giống nhau nhiều.

The normal vector for this guy would be sticking straight out towards me or away from me. Let's say I am having it come to the front. The normal vector would be plus/minus i. And the variables that I would be using, to find out my position on this guy, would be y and z. In terms of those, the surface element is just dy dz. Similarly for planes parallel to the xz plane. You can figure that one out. These are somehow the easiest ones, because those we already know how to compute without too much trouble. What if it is a more complicated plane? We will come back to that next time. Let's explore some other situations first.
Vector pháp tuyến của thẳng này sẽ đâm thẳng ra ngoài hướng về phía tôi hoặc ra xa tôi. Giả sử rằng nó hướng về phía trước. Vector pháp tuyến sẽ là cộng / trừ i. Và các biến mà tôi sẽ dùng, để tìm ra vị trí của tôi trên thẳng này, sẽ là y và z. Theo những cái đó, yếu tố bề mặt chỉ là dy dz. Tương tự như vậy đối với mặt phẳng song song với mặt phẳng xz. Bạn có thể tìm ra cái đó. Đây là những cái dễ nhất, bởi vì những cái đó chúng ta đã biết cách tính mà không gặp nhiều khó khăn. Nếu như nó là mặt phẳng phức tạp hơn thì sao? Chúng ta sẽ quay lại vào lần tới. Trước tiên hãy xét một số trường hợp khác.

Number one on the list. Let's say that I gave you a sphere of radius a centered at the origin, or maybe just half of that sphere or some portion of it. Well, we have already seen how to do things. Namely, we will be saying the normal vector is x, y, z over a, plus or minus depending on whether we want it pointing in or out. And dS will be a^2 sin phi d phi d theta. In fact, we will express everything in terms of phi and theta. If I wanted to I could tell you what the formulas are for x, y, z in terms of phi and theta. You know them. But it is actually better to wait a little bit. It is better

to do F dot n, because F is also going to have a bunch of x's, y's and z's.
Số một trong danh sách. Giả sử rằng tôi cho bạn mặt cầu bán kính a tâm tại gốc tọa độ, hoặc có thể chỉ là nửa mặt cầu hoặc phần nào đó của nó. Vâng, chúng ta đã thấy cách làm các thứ rồi. Cụ thể, chúng ta có vector pháp tuyến là x, y, z trên a, cộng hoặc trừ tuỳ thuộc vào chúng ta muốn nó hướng vào hay hướng ra. Và dS sẽ là a^ 2 sin phi d phi d theta. Trong thực tế, chúng ta sẽ biểu diễn mọi thứ theo phi và theta. Nếu tôi muốn tôi có thể cho bạn biết công thức của x, y, z theo phi và theta là gì. Bạn biết chúng. Nhưng chờ một chút sẽ tốt hơn. Thực hiện F dot n sẽ tốt hơn, vì F cũng sẽ có một chùm các x, các y và các z.

And if there is any kind of symmetry to the problem then you might end up with things like x^2 y^2 z^2 or things that have more symmetry that are easier to express in terms of phi and theta. The advice would be first do the dot product with F, and then see what you get and then turn it into phi and theta. That is one we have seen. Let's say that I have -- It is a close cousin. Let's say I have a cylinder of radius a centered on the z-axis. What does that look like? And, again, when I say cylinder, it could be a piece of cylinder. First of all, what does the normal vector to a cylinder look like? Well, it is sticking straight out, but sticking straight out in a slightly different way from what happens with a sphere.
Và nếu bài toán có bất kì loại đối xứng nào thì bạn có thể được kết quả là x ^ 2 y ^ 2 z ^ 2 hoặc những thứ có tính đối xứng hơn sẽ dễ hơn để biểu diễn theo phi và theta. Lời khuyên đầu tiên sẽ là thực hiện tích vô hướng với F, và sau đó xem kết quả là gì và sau đó chuyển nó sang phi và theta. Đó là cái mà chúng ta đã thấy. Giả sử rằng tôi có - Đó là một người anh em họ gần gũi. Giả sử rằng tôi có hình trụ bán kính a tâm trên trục z. Nó có dạng thế nào? Và, một lần nữa, khi tôi nói hình trụ, nó có thể là một phần của hình trụ. Trước hết, vector pháp tuyến của hình trụ có dạng thế nào? Vâng, nó đâm thẳng ra ngoài, nhưng nó đâm thẳng ra ngoài theo cách hơi khác với hình cầu.

See, the sides of a cylinder are vertical. If you imagine that you have this big cylindrical type in front of you, hopefully you can see that a normal vector is going to always be horizontal. It is sticking straight out in the horizontal directions. It doesn't have any z component. I claim the normal vector for the cylinder, if you have a point here at (x, y, z), it would be pointing straight out away from the central axis.
Thấy không, các mặt bên của hình trụ thẳng đứng. Nếu bạn tưởng tượng rằng bạn có loại hình trụ lớn này ở trước bạn, hy vọng bạn có thể thấy rằng vector pháp tuyến luôn luôn nằm ngang. Nó đâm thẳng ra ngoài theo hướng nằm ngang. Nó không có bất kỳ thành phần z nào. Tôi khẳng định vector pháp tuyến của hình trụ, nếu bạn có một điểm ở đây tại (x, y, z), nó sẽ đâm thẳng ra ngoài từ trục giữa.

My normal vector, well, if I am taking it two points outwards, will be going straight away from the central axis. If I look at it from above, maybe it is easier if I look at it from above, look at x, y, then my cylinder looks like a circle and the normal vector just points straight out. It is the same situation as when we had a circle in the 2D case. The normal vector for that is just going to be x, y and 0 in the z component. Well, plus/minus, depending on whether you want it sticking in or out.

vector pháp tuyến của tôi, vâng, nếu tôi chọn hai điểm bên ngoài, sẽ đi thẳng ra khỏi trục trung tâm. Nếu tôi nhìn nó từ phía trên, có thể sẽ dễ hơn nếu tôi nhìn vào nó từ trên, nhìn vào x, y, thì hình trụ của tôi có dạng một hình tròn và vector pháp tuyến hướng thẳng ra ngoài. Đây là trường hợp tương tự như khi chúng ta có một đường tròn trong trường hợp 2 chiều. Vector pháp tuyến của nó sẽ là x, y và 0 trong thành phần z. Vâng, cộng / trừ, phụ thuộc vào việc bạn muốn nó đâm vào trong hay ra ngoài.

We said in our cylinder normal vector is plus or minus x, y, zero over a. What about the surface element? Before we ask that, maybe we should first figure out what coordinates are we going to use to locate ourselves in a cylinder. Well, yes, we probably want to use part of a cylindrical coordinate, except for, well, we don't want r because r doesn't change, it is not a variable here. Indeed, you probably want to use z to tell how high you are and theta to tell you where you are around. dS should be in terms of dz d theta.
Chúng ta đã nói trong hình trụ của chúng ta vector pháp tuyến là cộng hoặc trừ x, y, không trên a. Thế còn các yếu tố bề mặt thì sao? Trước khi chúng ta trả lời, có lẽ trước hết chúng ta nên chỉ ra chúng ta sẽ dùng tọa độ gì để định vị chính chúng ta trong một hình trụ. Vâng, đúng, có lẽ chúng ta muốn sử dụng một phần của tọa độ trụ, ngoại trừ, vâng, chúng ta không muốn r, vì r không thay đổi, nó không phải là một biến ở đây. Thật vậy, bạn có thể muốn dùng z để cho chúng ta biết bạn đang ở độ cao bao nhiêu và theta để cho biết đang đang ở quanh đâu. dS sẽ theo dz d theta.

Now, what is the constant? Well, let's look at a small piece of our cylinder corresponding to a small angle delta theta and a small height delta z. Well, the height, as I said, is going to be delta z. What about the width? It is going to be a piece of a circle of radius a corresponding to the angle delta theta, so this side will be a delta theta. Delta S is a delta theta delta z. DS is just a dz d theta or d theta dz. It doesn't matter which way you do it. And so when we set up the flux integral, we will take first the dot product of f with this normal vector.
Bây giờ, hằng số là gì? Vâng, hãy xét một phần nhỏ của hình trụ tương ứng với góc delta theta nhỏ và độ cao nhỏ delta z. Vâng, chiều cao, như tôi đã nói, sẽ là delta z. Thế còn chiều rộng thì sao? Nó sẽ là một phần của đường tròn bán kính a tương ứng với góc delta theta, vì vậy cạnh này sẽ là a delta theta. Delta S sẽ là a delta theta delta z. DS chính là a dz d theta hoặc d theta dz. Cách làm thế nào không quan trọng. Và như vậy khi chúng ta thiết lập tích phân thông lượng, trước tiên chúng ta sẽ lấy tích vô hướng của f với vector pháp tuyến này.

Then we will stick in this dS. And then, of course, we will get rid of any x and y that are left by expressing them in terms of theta. Maybe x becomes a cos theta, y becomes a sin theta. These various formulas, you should try to remember them because they are really useful, for the sphere, for the cylinder. And, hopefully, those for the planes you kind of know already intuitively. What about marginals or faces? Not everything in life is made out of cylinders and spheres. I mean it is a good try. Let's look at a marginal kind of surface. Let's say I give you a graph of a function z equals f of x, y. This guy has nothing to do with the integrand.
Sau đó, chúng ta sẽ đâm vào dS này. Và sau đó, tất nhiên, chúng ta sẽ loại trừ bất kỳ x và y nào còn lại bằng cách biểu diễn chúng theo theta. Có lẽ x sẽ trở thành a cos theta, y sẽ trở thành a sin theta. Những công thức khác nhau này, bạn nên cố gắng ghi nhớ chúng bởi vì chúng thực sự hữu ích, cho tọa cầu, cho tọa độ trụ. Và, hy vọng, bạn đã có trực giác về những thứ này trong mặt phẳng. Thế còn các biên và các mặt thì sao? Không phải mọi thứ trong cuộc sống được làm từ hình trụ và hình cầu. Tôi muốn nói là nó là pháp thử tốt. Hãy xét một loại biên của bề mặt. Giả sử rằng tôi cho bạn đồ thị của hàm z bằng f x, y. Thằng này không có gì để làm với biểu thức dưới dấu tích

phân.

It is not what we are integrating. We are just integrating a vector field that has nothing to do with that. This is how I want to describe the surface on which I will be integrating. My surface is given by z as a function of x, y. Well, I would need to tell you what n is and what dS is. That is going to be slightly annoying. I mean, I don't want to tell them separately because you see they are pretty hard. Instead, I am going to tell you that in this case, well, let's see. What variables do we want? I am going to tell you a formula for n dS. What variables do we want to express this in terms of? Well, most likely x and y because we know how to express z in terms of x and y. This is an invitation to get rid of any z that might be left and set everything up in terms of dx dy.
Nó không phải là những gì chúng ta sẽ lấy tích phân. Chúng ta chỉ lấy tích phân một trường vector không có gì để làm với nó. Đây là cách tôi muốn mô tả bề mặt mà tôi sẽ lấy tích phân trên đó. Mặt của tôi được cho bởi z là hàm của x, y. Vâng, tôi cần phải cho bạn biết n là gì và dS là gì. Điều đó hơi phiền nhiễu. Ý tôi là, tôi không muốn nói chúng riêng biệt vì bạn thấy chúng khá khó. Thay vào đó, tôi sẽ bảo bạn rằng trong trường hợp này, vâng, xem nào. Chúng ta muốn biểu diễn cái này theo biến nào? Tôi sẽ cho bạn công thức của n dS. Chúng ta muốn biểu diễn cái này theo biến nào? Vâng, rất có thể x và y bởi vì chúng ta biết cách biểu diễn z theo x và y. Đây là một đề nghị để bỏ z có thể còn lại và thiết lập mọi thứ theo dx dy.

The formula that we are going to see, I think we are going to see the details of why it works tomorrow, is that you can take negative partial f partial x, negative partial f partial y, one, dx dy. Plus/minus depending on which way you want it to go. If you really want to know what dS is, well, dS is the magnitude of this vector times dx dy. There will be a square root and some squares and some stuff. What is the normal vector? Well, you take this vector and you scale it down to unit length. Just to emphasize it, this guy here is not n and this guy here is not dS.
Công thức mà chúng ta sẽ thấy, tôi nghĩ chúng ta sẽ biết chi tiết về việc tại sao nó đúng vào ngày mai, là bạn có thể lấy trừ đạo hàm riêng của f theo x, trừ đạo hàm riêng của f theo y, một, dx dy. Cộng / trừ phụ thuộc vào bạn muốn nó đi theo đường nào. Nếu bạn muốn biết dS là gì, vâng, dS là độ lớn của vector này nhân dx dy. Đó sẽ là căn bậc hai và cái gì đó bình phương và cái gì đó. Vector pháp tuyến là gì? Vâng, bạn lấy vector này và bạn lấy tỉ lệ nó xuống chiều dài đơn vị. Chú ý, thằng này ở đây không phải là n và thằng này ở đây không phải là dS.

Each of them is more complicated than that, but the combination somehow simplifies nicely. And that is good news for us. Now, concretely, one way you can think about it is this tells you how to reduce things to an integral of x and y. And, of course, you will have to figure out what are the bounds on x and y. That means you will need to know what does the shadow of your surface look like in the x, y plane.

Mỗi cái trong số chúng phức tạp hơn cái đó, nhưng tổ hợp của chúng lại đơn giản. Và đó là tin tốt cho chúng ta. Bây giờ, cụ thể, một cách mà bạn có thể nghĩ về nó là cái này cho bạn biết cách đưa các thứ về tích phân của x và y. Và, tất nhiên, bạn sẽ phải tìm ra các cận của x và y là gì. Điều đó có nghĩa là bạn cần phải biết hình chiếu của bề mặt của bạn xuống mặt phẳng x, y là gì.

To set up bounds on whatever you will get dx dy, well, of course you can switch to dy dx or anything you would like, but you will need to look at the shadow of S in the x y plane. But only do that after you gotten rid of all the z. When you no longer have z then you can figure out what the bounds are for x and y. Any questions about that? Yes? For the cylinder. OK. Let me re-explain quickly how I got a normal vector for the cylinder. If you know what a cylinder looks like, you probably can see that the normal vector sticks straight out of it horizontally.
Để thiết lập các cận khi tính tích phân dx dy, vâng, dĩ nhiên bạn có thể chuyển sang dy dx hoặc bất cứ thứ tự nào bạn muốn, nhưng bạn cần xét hình chiếu của S trong mặt phẳng x y. Nhưng chỉ làm vậy sau khi bạn đã loại bỏ được tất cả z. Khi bạn không còn z thì bạn có thể chỉ ra các cận của x và y là gì. Có câu hỏi nào về điều đó không? Xin mời? Đối với hình trụ. Được rồi. Tôi sẽ giải thích lại cách tìm vector pháp tuyến của hình trụ. Nếu bạn biết hình trụ có dạng như thế nào, có thể bạn sẽ thấy rằng vector pháp tuyến đâm thẳng ra ngoài nó theo phương ngang.

That means the z component of n is going to be zero. And then the x, y components you get by looking at it from above. One last thing I want to say. What about the geometric interpretation and how to prove it? Well, if your vector field F is a velocity field then the flux is the amount of matter that crosses the surface that passes through S per unit time. And the way that you would prove it would be similar to the picture that I drew when we did it in the plane. Namely, you would consider a small element of a surface delta S.
Điều đó có nghĩa là thành phần z của n bằng không. Và thế thì các thành phần x, y mà bạn nhận được bằng cách nhìn nó từ trên. Điều cuối cùng tôi muốn nói. Thế còn cách diễn giải hình học và chứng minh nó thì sao? Vâng, nếu trường vector F của bạn là một trường vận tốc thì thông lượng là lượng vật chất đó đi qua bề mặt đi qua S trên một đơn vị thời gian. Và cách mà bạn sẽ chứng minh nó sẽ tương tự với những hình mà tôi đã vẽ khi chúng ta làm nó trong mặt phẳng. Cụ thể, bạn sẽ xét một yếu tố nhỏ của bề mặt delta S.

And you would try to figure out what is the stuff that flows through it in a second. Well, it is the stuff that lives in a small box whose base is that piece of surface and whose other side is given by the vector field. And then the volume of that is given by base times height, and the height is F dot n. It is the same argument as what we saw in the plane. OK. Next time we will see more formulas. We will first see how to prove this, more ways to do it, more examples. And then we will get to the divergence theorem.
Và bạn sẽ cố gắng tìm ra các thứ chảy qua nó trong một giây là gì. Vâng, nó là thứ nằm trong một hộp nhỏ mà đáy của nó là một mảnh của bề mặt và cạnh còn lại của nó được cho bởi trường vector. Và thế thì thể tích của nó bằng diện tích đáy nhân chiều cao, và chiều cao là F dot n. Đây là lập luận tương tự như những gì chúng ta đã thấy trong mặt phẳng. Vâng. Lần tới chúng ta sẽ gặp thêm các công thức. Đầu tiên chúng ta sẽ thấy cách để chứng minh cái này, có nhiều cách làm, thêm các ví dụ. Và sau đó chúng ta sẽ học định lí divergence.