Extending the applicability of the Gauss–Newton method under average Lipschitz–type conditions

Mở rộng khả năng của phương pháp Gauss–Newton trong các điều kiện loại Lipschitz trung bình

Abstract We extend the applicability of the Gauss–Newton method for solving singular systems of equations under the notions of average Lipschitz–type conditions introduced recently in Li et al. (J Complex 26(3):268–295, 2010).Using our idea of recurrent functions, we provide a tighter local as well as semilocal convergence analysis for the Gauss–Newton method than in Li et al. (J Complex 26(3):268–295, 2010) who recently extended and improved earlier results (Hu et al. J Comput Appl Math 219:110–122, 2008;Lietal. Comput Math Appl 47:1057–1067, 2004; Wang Math Comput 68(255):169–186,1999). We also note that our results are obtained under weaker or the same hypotheses as in Li et al. (J Complex 26(3):268–295, 2010). Applications to some special cases of Kantorovich–type conditions are also provided in this study.

Tóm tắt Chúng tôi mở rộng khả năng của phương pháp Gauss–Newton để giải hệ phương trình kì dị dựa trên khái niệm điều kiện loại Lipschitz trung bình được đưa ra gần đây trong công trình của Li và các cộng sự (J Complex 26(3):268–295, 2010). Dựa trên ý tưởng về các hàm truy hồi, chúng tôi đưa ra phân tích hội tụ cục bộ cũng như bán cục bộ chặt chẽ hơn cho phương pháp Gauss–Newton so với Li và các cộng sự. (J Complex 26(3):268–295, 2010) là những người đã mở rộng và cải thiện các kết quả trước đây (Hu et al. J Comput Appl Math 219:110–122, 2008;Lietal. Comput Math Appl 47:1057–1067, 2004; Wang Math Comput 68(255):169–186,1999). Chú ý là các kết quả của chúng tôi thu được dưới các giả thuyết yếu hơn hoặc tương tự như trong Li và các cộng sự (J Complex 26(3):268–295, 2010). Việc áp dụng cho các trường hợp đặc biệt của điều kiện loại Kantorovich cũng được đưa ra (thực hiện) trong nghiên cứu này.

1 Introduction

1 Giới thiệu

In this study we are concerned with the problem of approximating a locally unique solution xof equation

Trong nghiên cứu này, chúng tôi sẽ tập trung vào bài toán xấp xỉ nghiệm duy nhất cục bộ x^* của phương trình

……………………………………………………………………..

where, F is a Fréchet–differentiable operator defined on an open, nonempty, convex subset D of Rm with values in Rl ,where m, l ∈ N.

Ở đây, F là toán tử vi phân Fréchet được định nghĩa trên một tập con mở, không rỗng, lồi $\mathcal{D}$ của $\mathbb{R}^m$ với các giá trị trong $\mathbb{R}^l$, ở đây $m, l \in \mathbb{N}^*$.

The field of computational sciences has seen a considerable development in mathematics, engineering sciences, and economic equilibrium theory. For example, dynamic systems are mathematically modeled by difference or differential equations, and their solutions usually represent the states of the systems. For the sake of simplicity, assume that a time–invariant system is driven by the equation ˙x = T(x), for some suitable operator T,where x is the state. Then the equilibrium states are determined by solving equation (1.1).

Lĩnh vực khoa học tính toán đã thúc đẩy sự phát triển đáng kể trong toán học, khoa học kỹ thuật, và lí thuyết thăng bằng kinh tế (lí thuyết cân bằng kinh tế). Ví dụ, các hệ động lực học có thể được mô hình hóa toán học bằng các phương trình sai phân hoặc vi phân, các nghiệm của chúng thường biểu diễn trạng thái của hệ. Để đơn giản, giả sử rằng hệ bất biến thời gian tuân theo phương trình $\dot{x} = T(x)$, đối với toán tử T thích hợp nào đó, ở đây x là trạng thái. Thế thì, các trạng thái cân bằng có thể được xác định bằng cách giải phương trình (1.1).

Similar equations are used in the case of discrete systems. The unknowns of engineering equations can be functions (difference, differential, and integral equations), vectors (systems of linear or nonlinear algebraic equations), or real or complex numbers (single algebraic equations with single unknowns).

Các phương trình tương tự được sử dụng trong trường hợp các hệ rời rạc (hệ gián đoạn). Biến của các phương trình kĩ thuật có thể là các hàm (các phương trình sai phân, vi phân và tích phân), các vector (các hệ phương trình đại số tuyến tính hoặc *phi tuyến), các số thực hoặc phức (các phương trình đại số đơn giản với các nghiệm đơn)*

Except in special cases, the most commonly used solution methods are iterative–when starting from one or several initial approximations a sequence is constructed that converges to a solution of the equation. Iteration methods are also applied for solving optimization problems. In such cases, the iteration sequences con-verge to an optimal solution of the problem at hand. Since all of these methods have the same recursive structure, they can be introduced and discussed in a general framework. We note that in computational sciences, the practice of numerical analysis for finding such solutions is essentially connected to variants of Newton's method.

Ngoại trừ một số trường hợp đặc biệt, những phương pháp được sử dụng phổ biến nhất là lặp – khi bắt đầu từ một hoặc một số gần đúng ban đầu một dãy được xây dựng hội tụ về một nghiệm của phương trình. Các phương pháp lặp cũng được áp dụng cho việc giải các bài toán tối ưu hóa. Trong những trường hợp như thế,các dãy lặp dễ dàng hội tụ về nghiệm tối ưu của bài toán. Bởi vì tất cả các phương pháp này có cấu trúc đệ quy (truy hồi) giống nhau, chúng có thể được đưa ra và được thảo luận trong một cơ sở chung. Chú ý là trong khoa học tính toán, việc thực hành các phân tích số để tìm các nghiệm như thế về cơ bản được kết nối với các biến thể của phương pháp Newton.

We shall use the Gauss–Newton method (GNM)

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp Gauss–Newton (GNM)

……………………………………………………

to generate a sequence {xn} approximating a solution xof equation

để tạo ra dãy $\{x_n\}$ xấp xỉ nghiệm x^* của phương trình

……………………………………………………….

where, F————————————(x)+ denotes the Moore–Penrose inverse of matrix F————————————(x),(x ∈ D) (see Definition 2.3).

ở đây $F'(x)^+$ chỉ nghịch đảo Moore–Penrose của ma trận $F'(x)$, (x ∈ $\mathcal{D}$) (xem định nghĩa 2.3).

If m = l,and F——————————(xn) is invertible, then (GNM) reduces to Newton's method (NM) given by

Nếu m=l và $F'(x_n)$, khả nghịch, thì (GNM) rút về phương pháp Newton (NM) được cho bởi

……………………………………………………………………..

There is an extensive literature on the local as well as the semilocal con-vergence of (GNM) and (NM) under Lipschitz–type conditions. We refer the reader to [4, 6] and the references there for convergence results on Newton–type methods (see also [1–3, 5, 9–30, 32–52]). In particular, we recommend the paper by Xu and Li [52], where (GNM) is studied under average Lipschitz conditions.

Có một tài liệu rất bao quát về hội tụ cục bộ cũng như bán cục bộ của (GNM) và (NM) trong các điều kiện loại Lipschitz. Người đọc có thể tìm các công trình [4,6] và tham khảo các kết quả hội tụ của phương pháp loại Newton ở đó (hoặc cũng có thể tham khảo [1–3, 5, 9–30, 32–52]). Đặc biệt, chúng tôi đề nghị bài báo do Xu và Li [52] ở đó (GNM) được nghiên cứu trong điều kiện Lipschitz trung bình.

In [31], Li, Hu and Wang provided a Kantorovich–type convergence analysis for (GNM) by inaugurating the notions of a certain type of average Lipschitz conditions. (GNM) is also studied using the Smale point estimate theory. This way, they unified convergence criteria for (GNM). Special cases of their results extend and/or improve important known results [3, 23].

Trong [31], Li, Hu and Wang đưa ra phân tích hội tụ loại Kantorovich cho (GNM) bằng cách triển khai khái niệm về một loại điều kiện Lipschitz trung bình nào đó. (GNM) cũng được nghiên cứu dùng lí thuyết ước tính điểm Smale. Bằng cách này, họ đã hợp nhất các tiêu chuẩn hội tụ cho (GNM). Các trường hợp đặc biệt của kết quả của họ mở rộng và/hoặc cải thiện các kết quả quan trọng đã biết [3, 23].

In this study, we are motivated by the elegant work in [31] and optimization considerations. In particular, using our new concept of recurrent functions, we provide a tighter convergence analysis for (GNM) under weaker or the same hypotheses in [31] for both the local as well the semilocal case.

Động lực để chúng tôi thực hiện nghiên cứu này là công trình tinh tế [31] và các xem xét tối ưu hóa. Đặc biệt, dùng khái niệm mới hàm truy hồi (hồi qui)(hồi qui), chúng tôi đã đưa ra phân tích hội tụ chặt chẽ hơn cho (GNM) dưới các giả thiết yếu hơn hoặc tương tự như trong [31] cho cả hai trường hợp cục bộ cũng như bán cục bộ.

The study is organized as follows: Section 2 contains some preliminaries on majorizing sequences for (GNM), and well known properties for Moore–Penrose inverses. In Sections 3 and 4, we provide a semilocal convergence analysis for (GNM), respectively, using the Kantorovich approach. The semi-local convergence for (GNM) using recurrent functions is given in Section 5. Finally, applications and further conparisons between the Kantorovich and the recurrent functions approach are given in Section 6.

Nghiên cứu này được tổ chức như sau: Phần 2 bao gồm một số xem xét sơ bộ về các dãy trội cho (GNM), và các tính chất đã biết của nghịch đảo Moore–Penrose. Trong phần 3 và 4, chúng tôi đưa ra phân tích hội tụ bán cục bộ cho (GNM) dùng phương pháp Kantorovich. Hội tụ bán cục bộ cho (GNM) dùng các hàm truy hồi (hồi qui) được cho trong phần 5. Cuối cùng, các ứng dụng và so sánh giữa cách tiếp cận Kantorovich và cách tiếp cận hàm hồi quy được đưa ra trong phần 6.

2 Preliminaries

2 Xem xét sơ bộ

Let R = R ∪{+∞} and R+ =[0, +∞]. We assume that L and L0 are non–decreasing functions on [0, R),where R ∈ R+,and

Đặt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Chúng ta giả sử rằng L và L_0 là các hàm không tăng trên $[0, R)$, ở đây $R \epsilon \overline{\mathbb{R}}_+$, và

……………………………………………………………

Let β> 0,and 0 ≤ λ< 1 be given parameters. Define function g : [0, R]−→ R by

Đặt β> 0, và 0 ≤ λ< 1 là các tham số cho trước. Định nghĩa hàm $g\colon [0, R] \to \overline{\mathbb{R}}$ qua

………………………………………..

Moreover, define majorizing function $h\lambda$:[0, R]−→ R corresponding to a fixed pair (λ, L) by:

Thêm vào đó, định nghĩa hàm trội ……tương ứng với cặp *(λ, L)* không đổi qua:

…………………………………………………..

We have for t ∈[0, R]

Đối với t ∈[0, R], chúng ta có

………………………………

Và

………………………………………………….

It follows from (2.1), (2.4), and (2.6)that

Từ (2.1), (2.4), và (2.6), suy ra

………………………………………..

Define

Định nghĩa

…………………………………………..

Và

……………………………………

Set

Đặt

…………………………………………

Then, we have:

Thế thì, chúng ta có:

……………………………………..

where, t1 ∈[0, R] is such that

ở đây, …..sao cho

………………………………………………….

and is guaranteed to exist, since ≥ 1 − λ in this case.

và được đảm bảo tồn tại, bởi vì …..trong trường hợp này.

We also get

Chúng ta cũng nhận được

……………………………………….

Let us define scalar sequence $\{s_{\lambda,n}\}$ by

Chúng ta hãy định nghĩa dãy vô hướng $\{s_{\lambda,n}\}$ qua

…………………………………………

Note that if equality holds in (2.1), then

Chú ý rằng nếu đẳng thức đúng trong (2.1), thì

……………………………………………………

and {sλ,n} reduces to {tλ,n} introduced in [31], and given by:

và $\{s_{\lambda,n}\}$ rút về $\{t_{\lambda,n}\}$ được đưa ra trong [31], và được cho bởi:

………………………………………………………..

We shall show in Lemma 2.2 that under the same hypothesis (see (2.16)), scalar sequence {sλ,n} is at least as tight as {tλ,n}. But first, we need a crucial result on majorizing sequences for the (GNM).

Trong bổ đề 2.2, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng dưới giả thiết tương tự (xem 2.16), dãy vô hướng $\{s_{\lambda,n}\}$ ít nhất cũng mạnh như dãy $\{t_{\lambda,n}\}$. Nhưng trước hết, chúng ta cần một kết quả quyết định về các dãy trội cho (GNM).

Lemma 2.1 Assume:

Bổ đề 2.1 Giả sử:

………………………………………………………………………

Then, the following hold

Thế thì, những điều sau đây là đúng

(i)Function hλ is strictly decreasing on [0, rλ], and has exactly one zero tλ ∈ [0, rλ], such that

(i) Hàm h_λ giảm nghiêm ngặt trên [0, r_λ], và có một giá trị không ngay tại……, sao cho

………………………………………………………………..

(ii) Sequence {sλ,n} given by (2.13) is strictly increasing, and converges to tλ.

(ii) Dãy {$s_{\lambda,n}$} được cho bởi (2.13) tăng nghiêm ngặt, và hội tụ về ….

Proof

Chứng minh

(i) This part follows immediately from (2.3), (2.6), and (2.10).

(ii) We shall show this part using induction on n. It follows from (2.13), and

(2.17)that

(i) Phần này được suy ra ngay từ (2.3), (2.6), và (2.10).

(ii) Chúng ta sẽ chứng minh phần này dùng phép quy nạp trên n. Từ (2.13) và (2.17) suy ra rằng

……………………………………………………………………..

Assume

Giả sử

……………………………………………………

In view of (2.5), −g———————————— is strictly increasing on [0, R], and so by (2.8), (2.18), and the definition of rλ, we have

Nhìn vào (2.5), …..tăng nghiêm ngặt trên [0,R], và vì vậy qua (2.8), (2.18), và định nghĩa của r_{λ} , chúng ta có

…………………………………………………………

We also have hλ(sλ,k)> 0 by (i). That is, it follows from

Chúng ta cũng có $h_{\lambda}(s_{\lambda,k})> 0$ qua (i). Tức là, suy ra từ

………………………………………………………….

Let us define pλ on [0, tλ] by

Chúng ta hãy định nghĩa …..trên …qua

………………………………………………………….

We have

Chúng ta có

…………………………………………………….

except if λ = 0,and t = tλ = rλ.Asin[31], we set by convention

ngoại trừ nếu ….., và……, chúng ta đặt theo quy ước

……………………………………………..

by Hospital's rule.

qua quy tắc Hospital.

Therefore, function pλ is well defined, and continuous on [0, tλ].Itthen follows from part (i), (2.7), and (2.22):

Do đó, hàm p_{λ} cũng được hoàn toàn xác định, và liên tục trên….Từ phần (i), (2.7), và (2.22), chúng ta suy ra:

…………………………………………………………

Using (2.18), (2.20), and (2.24), we get

Dùng (2.18), (2.20), và (2.24), chúng ta thu được

……………………………………..

which completes the induction.

hoàn thành phần quy nạp

Hence {sλ,n} is increasing, bounded above by tλ, and as such it converges to its unique least upper bound s ∈ (0, tλ],with hλ(s) = 0. Using part (i), we get s= tλ.

Vì thế $\{s_{\lambda,n}\}$ đang tăng, được lấy cận trên bởi …., và như thế nó hội tụ về cận trên bé nhất duy nhất của nó ….., với ………. Dùng phần (i), chúng ta thu được ……

That completes the proof of Lemma 2.1.

Điều đó hoàn thành chứng minh bổ đề 2.1.

Next, we compare sequence {sλ,n} with {tλ,n}.

Tiếp theo, chúng ta so sánh dãy $\{s_{\lambda,n}\}$ với $\{t_{\lambda,n}\}$.

Lemma 2.2 Assume that condition (2.16) holds, then the following hold for

n ≥ 0:

Bổ đề 2.2 Giả sử rằng điều kiện (2.16) đúng, thế thì điều sau đây là đúng cho n ≥ 0:

…………………………………………………….

And

Và

………………………………………………………

Moreover, if L0(t)< L(t) for t ∈[0, tλ],then (2.26),and (2.27) hold as strict inequalities for n ≥ 1,andn ≥ 0, respectively.

Hơn nữa, nếu …..đối với…., thì (2.26), và (2.27) đúng như là các bất đẳng thức ngặt (hay tính không bằng tuyệt đối) cho n ≥ 1, và n ≥ 0 tương ứng.

Proof It was shown in [31] that under hypothesis (2.16), assertions (i) and (ii) of Lemma 2.1 hold with {tλ,n} replacing {sλ,n}.

Chứng minh Trong [31] người ta chứng tỏ rằng dưới giả thiết (2.16), khẳng định (i) và (ii) của bổ đề 2.1 đúng với $\{t_{\lambda,n}\}$ thay cho $\{s_{\lambda,n}\}$.

We shall show (2.26), and (2.27) using induction. It follows from (2.1), (2.13), and (2.15)that

Chúng ta sẽ chứng minh (2.26), và (2.27) dùng phép quy nạp. Từ (2.1), (2.13), và (2.15), suy ra

…………………………………………………………

And

Và

…………………………………………………….

Hence, (2.26), and (2.27) hold for n = 0. Let us assume that (2.26), and (2.27) hold for all k ≤ n. Then, we have in turn:

Vì thế (2.26), và (2.27) đúng đối với *n=0*. Chúng ta hãy giả sử rằng (2.26), và (2.27) đúng đối với tất cả k ≤ n. Thế thì, chúng ta có kết quả là:

……………………………………………

And

và

……………………………………………………………..

which completes the induction for (2.26), and (2.27).

nó hoàn thành quy nạp (2.26), và (2.27).

Moreover, if L0(t)< L(t) for t ∈[0, tλ],then(2.28)–(2.31) hold as strict inequalities.

Hơn nữa, nếu …….đối với …., thì (2.28)–(2.31) đúng như là các bất đẳng thức nghiêm ngặc (là bất đẳng thức mà nếu chúng ta thay dấu lớn hơn hoặc bé hơn bằng dấu bằng thì sẽ không thu được biểu thức đúng)..

That completes the proof of Lemma 2.1.

Điều đó hoàn chỉnh phần chứng minh bổ đề 2.1.

It is convenient for us to provide some well known definitions and proper-ties of the Moore–Penrose inverse [4, 12].

Để thuận tiện, chúng tôi cung cấp một số định nghĩa phổ biến và các tính chất của nghịch đảo Moore–Penrose [4, 12].

Definition 2.3 Let M be a matrix l × m.The m × l matrix M+ is called the Moore–Penrose inverse of M if the following four axioms hold:

Định nghĩa 2.3 Đặt M là ma trận l × m. Ma trận m × l M+ được gọi là nghịch đảo Moore–Penrose của M nếu bốn tiên đề sau đúng:

……………………………………………

where, M T is the adjoint of M.

ở đây, MT là liên hợp của M.

In the case of a full rank (l, m) matrix M,withrank M = m, the Moore–Penrose inverse is given by:

Trong trường hợp ma trận *(l, m)* hạng đầy đủ $\mathcal{M}$, với hạng $\mathcal{M} = m$, nghịch đảo Moore–Penrose là:

………………………………………………………

Denote by Ker M and Im M the kernel and image of M, respectively, and E the projection onto a subspace E of Rm. We then have

Kí hiệu Ker $\mathcal{M}$ và Im $\mathcal{M}$ là nhân và ảnh của $\mathcal{M}$, và … là sự chiếu trên không gian con E của …….. Thế thì chúng ta có

…………………………………………………..

Note that if M is surjective or equivalently, when M is full row rank, then

Nếu $\mathcal{M}$ là toàn ánh hoặc tương đương, khi $\mathcal{M}$ có hạng tối đa theo hàng, thì

………………………………………………….

We also state a result providing a pertubation upper bound for Moore–Penrose inverses [4, 50]:

Chúng tôi cũng phát biểu một kết quả cung cấp cận trên nhiễu loạn cho các nghịch đảo Moore–Penrose [4, 50]:

Lemma 2.4 Let M and N be two l × m matrices with rank N ≥ 1. Assume that

Bổ đề 2.4 Đặt $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ là hai ma trận $l \times m$ với hạng $\mathcal{N} \geq 1$. Giả sử rằng

…………………………………………………………

And

Và

…………………………………………………….

Then, the following hold

Thế thì, những điều sau đây là đúng

………………………………………………

And

Và

……………………………………………..

3 Semilocal convergence I of (GNM)

3 Hội tụ bán cục bộ I của (GNM)

We shall provide a semilocal convergence for (GNM) using majorizing se-quences under the Kantorovich approach.

Chúng ta sẽ đưa ra một hội tụ bán cục bộ cho (GNM) dùng các dãy trội trong phương pháp Kantorovich.

Let U (x, r) denotes an open ball in Rm with center x and of radius r > 0, and let U (x, r) denotes its closure. For the remainder of this study, we assume that F : Rm −→ Rl is continuous Fréchet–differentiable,

Đặt *U (x, r)* là một quả cầu hở trong ……. với tâm x và bán kính r>0, và đặt U (x, r) là hình bao của nó. Trong phần còn lại của nghiên cứu này, chúng tôi giả sử rằng …..là vi phân Fréchet liên tục,

…………………………………………………….

where, κ ∈[0, 1), I is the identity matrix,

ở đây, κ ∈[0, 1), I là ma trận đơn vị,

……………………………………………………

And

Và

…………………………………………….

We need the definition of the modified L–average Lipschitz condition on U (x0, r).

Definition 3.1 [31]Let r > 0 be such that U (x0, r) ⊆ D . Mapping F————————————— satisfies

the modified L–average Lipschitz condition on U (x0, r), if, for any x, y ∈

Chúng ta cần định nghĩa điều kiện Lipschitz trung bình L điều chỉnh trên U (x0, r).

Định nghĩa 3.1 [31] Đặt r > 0 sao cho U (x0, r) ⊆ D . Ánh xạ ..,thỏa mãn điều kiện Lipschitz trung bình L điều chỉnh trên U (x0, r), nếu bất kỳ ……

…………………………………………………..

Condition (3.4) was used in [31] as an alternative to L–average Lipschitz condition [26]

Điều kiện (3.4) được sử dụng trong [31] như một sự thay thế cho điều kiện Lipschitz trung bình L

……………………………………………..

which is a modification of Wang's condition [41, 42]. Condition (3.4)fitsthe case when F———————————(x0) is not surjective [31].

Nó là một biến thể của điều kiện Wang [41, 42]. Điều kiện (3.4) khớp với trường hợp khi ….không là toàn ánh [31].

We also introduce the condition.

Chúng tôi cũng đưa vào điều kiện

Definition 3.2 Let r > 0 be such that U (x0, r) ⊆ D . Mapping F——————————— satisfies the modified center L0–average Lipschitz condition on U (x0, r), if, for any x ∈

Định nghĩa 3.2 Đặt …..sao cho ……Ánh xạ….thoãn mãn điều kiện Lipschitz trung bình L0 trung tâm điều chỉnh trên U (x0, r), nếu đối với bất kỳ……

…………………………………………..

If (3.4) holds, then so do (3.6), and (2.1). Therefore, (3.6) is not an additional hypothesis. We also note that L can be arbitrarily large [1–7].

Nếu (3.4) đúng, thì (3.6) và (2.1) cũng đúng. Do đó, (3.6) không phải là một giả thuyết bổ sung. Chúng ta cũng chú ý rằng L có thể lớn tùy ý [1-7].

We shall use the perturbation result on Moore–Penrose inverses.

Chúng ta sẽ dùng kết quả nhiễu loạn trên các nghịch đảo Moore–Penrose.

Lemma 3.3 Let

Bổ đề 3.3 Đặt

…………………………….

Suppose that 0 ≤ r ≤ ˜r0 satisf ies U (x0, r) ⊆ D ,andthatF——————————— satisf ies (3.6) on U (x0, r).

Giả sử rằng ….thõa mãn …., và …..thỏa mãn (3.6) trên ………

Then, for each x ∈ U (x0, r), rank (F——————————(x)) = rank (F——————————(x0)),and

Thế thì, đối với mỗi ……, …………,và

…………………………………………………….

Remark 3.4 If equality holds in (2.1), then Lemma 3.3 reduces to Lemma 3.2 in [31]. Otherwise, (i.e. if strict inequality hold in (2.1)), (3.7) is a more precise estimate than

Nhận xét 3.4 Nếu đẳng thức đúng trong (2.1), thì bổ đề 3.3 trở về 3.2 trong [31]. Nói cách khác, (tức là nếu bất đẳng thức nghiêm ngặc đúng trong (2.1)), (3.7) là ước lượng chính xác hơn

……………………………………………………

given in [31], since

được cho trong [31], bởi vì

……………………………………………

We also have

Chúng ta cũng có

…………………………..

And

Và

…………………………………….

Where,

Ở đây,

……………………………………………..

We also state the result.

Chúng tôi cũng phát biểu kết quả.

Lemma 3.5 [26, 31] Let $0 \leq c < R$. Def ine

Bổ đề 3.5 [26, 31] Đặt $0 \leq c < R$. Định nghĩa

…………………………………………………..

Then, function χ is increasing on $[0, R - c)$

Thế thì, hàm χ đang tăng trên $[0, R - c)$

We can show the following semilocal convergence result for (GNM). Our approach differs from the corresponding [31, Theorem 3.1, p. 273] since we use

(3.7) instead (3.8).

Chúng tôi có thể chứng tỏ kết quả bán cục bộ sau đây cho (GNM). Phương pháp của chúng tôi khác với phương pháp trong [31, Theorem 3.1, p. 273] bởi vì chúng tôi dùng (3.7) chứ không phải (3.8).

Theorem 3.6 Let $\lambda \geq \tilde{\lambda}0$. Assume

Định lí 3.6. Đặt …..Giả sử

………………………………………..

F——————————— satisf ies (3.4) and (3.6) on U (x0, tλ).

….thõa mãn (3.4) và (3.6) trên…..

Then, sequence {xn} generated by (GNM) is well def ined, remains in U (x0, tλ) for all $n \geq 0$, and converges to a zero xof F———————————(.)+ F(.) in U (x0, tλ).

Thế thì, dãy ….được tạo bởi (GNM) hoàn toàn xác định, giữ nguyên trên ….đối với mọi $n \geq 0$, và hội tụ về không tại …….trong…..

Moreover, the following estimates hold:

Hơn nữa, những ước lượng sau đúng:

…………………………………………….

And

Và

……………………………………..

Proof We first use mathematical induction to prove that

Chứng minh Trước hết chúng ta dùng phép quy nạp toán học để chứng minh rằng

……………………………………

hold for each $n \geq 0$.

đúng đối với mỗi $n \geq 0$.

We first have

Trước hết chúng ta có

…………………………………………………

then (3.16) holds for $n = 0$.

thì (3.16) đúng đối với $n=0$.

Assume that (3.16) hold for all $n \leq k$.Then

Giả sử rằng (3.16) đúng đối với mọi $n \leq k$.Thế thì

…………………………………….

For $\theta \in [0, 1]$ we denote by

Đối với $\theta \in [0, 1]$, chúng ta kí hiệu bằng

…………………………………………

Then for all $\theta \in [0, 1]$

Thế thì đối với mọi $\theta \in [0, 1]$

…………………………………….

In particular

Đặc biệt

……………………………………

By Lemma 3.3 and the monotony property of function −g——————————————(.)−1, we obtain

Qua bổ đề 3.3 và tính chất đơn điệu của hàm ….., chúng ta thu được

………………………………………

We deduce by Lemma 3.5, (2.7)and(3.17)that

Qua bổ đề 3.5, (2.7) và (3.17), chúng ta suy ra

…………………………………………

Since

Bởi vì

………………………………

then estimate (3.21) becomes

thế thì ước lượng (3.21) trở thành

……………………………………

Using (2.1), we obtain the identity

Dùng (2.1), chúng ta thu được đồng nhất thức

…………………………………………….

By (3.1), (3.4), (3.21), and (3.23), we obtain

Qua (3.1), (3.4), (3.21), và (3.23), chúng ta thu được

…………………………………………..

Note that $\beta = s\lambda,1 \leq s\lambda,k$.By(3.11), we have

Chú ý rằng $\beta = s\lambda,1 \leq s\lambda,k$. Qua (3.11), chúng ta có

……………………………………………………

then $\kappa + \lambda$ g——————————————(sλ,k)−1 ≤ 0. Consequently, by (3.24), we get

thế thì ……Do đó, qua (3.24), chúng ta thu được

………………………………………………

and the induction for (3.14) is completed.

Và quy nạp cho (3.14) được hoàn thành.

In view of Lemma 3.5, sequence {xn} $(n \geq 0)$ converges to some $x \in U$ (x0, tλ). Estimate (3.15) follows from (3.14) by using standard majorization techniques [4, 6].

Nhìn vào bổ đề 3.5, dãy …..hội tụ về một …nào đó thuộc. Ước lượng (3.15) được suy ra từ (3.14) dùng các kỹ thuật trội tiêu chuẩn [4,6]

By letting $k \longrightarrow \infty$ in the inequality

Bằng cách đặt …trong bất đẳng thức

……………………………………..

we obtain F———————————————(x)+ F(x) = 0.

Chúng ta thu được……..

That completes the proof of Theorem 3.6

Điều đó hoàn thành chứng minh định lí 3.6.

Remark 3.7

Nhận xét 3.7

(a) If equality holds in (2.1), then Theorem 3.6 reduces to Theorem 3.1 in [31]. Otherwise, it follows from Lemmas 2.1, 2.2, and Remark 3.4 that under the same computational cost and hypotheses, we obtain the advantages over the works in [31] as stated in the introduction of this study. It also follows from (3.24)that {vλ,n} defined by

(a) Nếu đẳng thức đúng trong (2.1), thì định lí 3.6 trở thành định lí 3.1 trong [31]. Mặc khác, từ bổ đề 2.1, 2.2 và nhận xét 3.4 suy ra rằng với chi phí tính toán và giả thiết tương tự, chúng tôi thu được nhiều tiến bộ hơn so với các công trình trong [31] như đã được phát biểu trong phần giới thiệu của nghiên cứu này. Từ (3.24) suy ra ….được xác định bởi

....

is a tighter majorizing sequence for (GNM) than {sλ,n},sothat

là dãy trội chặt chẽ hơn cho (GNM) so với …., sao cho

…………………………………………

Và

……………………………………..

(see also the proof in Lemma 2.2 and Theorem 3.6). Hence, {vλ,n}, vλ can replace {sλ,n}, sλ, respectively in Theorem 3.6.

(xem chứng minh trong bổ đề 2.2 và Định lí 3.6). Vì thế, $\{v_\lambda ,n\}$,…có thể thay tương ứng bằng $\{s_\lambda,n\}$, ….trong Định lí 3.6.

…………………………………………………………………………….

At this point, we are wondering if conditions (3.13) can be weakened, since this way the applicability of (GNM) will be extended. It turns out that if {vλ,n} is used as a majorizing sequence for (GNM), conditions (3.13) can be replaced by weaker ones in many cases. The claim is justified in Section 5. However, before doing that we present the rest of our results for Section 3, which also constitute improvements of the corresponding [31]. The proofs are omitted, since they follow from [31] by simply using g—————————— instead of h——————————0. Note also that Corollary 3.8, Theorem 3.9, and Corollary 3.10 hold, with {vn}, v0 replacing {sn}, s0, respectively.

Vào lúc này, chúng ta chưa biết điều kiện (3.13) có thể được làm yếu hay không, bởi vì theo cách này khả năng của (GNM) sẽ được mở rộng. Hóa ra là nếu $\{v_\lambda,n\}$ được sử dụng như một dãy trội cho (GNM), các điều kiện (3.13) có thể được thay thế bằng các điều kiện yếu hơn trong nhiều trường hợp. Việc kiểm tra được thực hiện trong phần 5. Tuy nhiên, trước khi làm việc đó chúng ta giới thiệu phần còn lại của các kết quả của chúng tôi cho phần 3, nó cũng tạo nên những cải tiến so với công trình [31]. Việc chứng minh được bỏ qua, bởi vì chúng được suy ra từ [31] đơn giản bằng cách dùng…..chứ không phải…..Cũng cần chú ý là Hệ quả 3.8, Định lí 3.9, và Hệ quả 3.10 đúng với …….thay cho …một cách tương ứng.

(b) The condition (3.13) depends upon the choice of λ. The best choice of λ is ˜λ0 given by (3.11) and in this case, (3.13)wouldbeimplicit. Inthe following corollary, we consider the simple choice λ = κ such that the condition (3.11) is explicit.

(c) Điều kiện (3.13) phụ thuộc vào việc chọn λ. Chọn λ bằng …được cho trong (3.11) là tốt nhất và trong trường hợp này, (3.13) sẽ ẩn. Trong hệ quả sau, chúng ta xét phép lựa chọn đơn giản ….sao cho điều kiện (3.11) tường minh.

Corollary 3.8 Assume

Hệ quả 3.8 Giả sử

…………………………………………..

and F——————————— satisf ies (3.4),and (3.6) on U (x0, tλ).

Và F……..thỏa mãn (3.4) và (3.6) trên ……..

Then, the conclusions of Theorem 3.6 hold in U (x0, tκ) with λ = κ.

Thế thì, các kết luận của định lí 3.6 đúng trong ….với …..

We have the following improved version of Theorem 3.6 for κ = 0.

Chúng ta có phiên bản được cải thiện sau đây của định lí 3.6 đối với …..

Theorem 3.9 Assume

Định lí 3.9 Giả sử

………………………………………

and F———————————— satisf ies (3.4),and (3.6) on U (x0, t0).

Và F…..thõa mãn (3.4), và (3.6) trên………

Then, the conclusions of Theorem 3.6 hold in U (x0, t0) with λ = 0.Furthe-more, we have the additional estimate for n ≥ 1:

Thế thì, các kết luận của định lí 3.6 đúng trong ….với …Hơn nữa, chúng ta có ước lượng bổ sung đối với n ≥ 1:

……………………………………..

In the case when F————————————(x0) is surjective, we have the following corollary.

Trong trường hợp khi …..toàn ánh, chúng ta có hệ quả sau.

Corollary 3.10 Assume that F————————————(x0) is surjective, and the conditions of Theorem 3.9 hold.

Hệ quả 3.10 Giả sử rằng …..toàn ánh, và các điều kiện của định lí 3.9 đúng.

Then, the conclusions of Theorem 3.9 hold for t0 replaced by s0. Furthemore,

we have the additional estimate for n ≥ 1:

Thế thì, các kết luận của định lí 3.9 đúng khi …được thay bằng …Hơn nữa, chúng ta có ước lượng bổ sung đối với n ≥ 1:

…………………………………………

4 Local convergence of (GNM)

4 Sự hội tụ cục bộ của (GNM)

We shall provide a local convergence analysis for (GNM).

Chúng ta sẽ thực hiện phân tích hội tụ cục bộ cho (GNM).

Assume:

There exists $x \in D$ such that $F(x) = 0$,and F————————————(x) = 0 ;

Giả sử:

Tồn tại ….sao cho…., và ………;

……………………………………………..

Và

………………………………………..(4.1)

Next, we provide an upper bound on the norm

F——————————————(x0)+ F(x0) needed in the proof of the main result of this section.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra cận trên trên …..chuẩn cần thiết trong việc chứng minh kết quả chính của phần này.

Lemma 4.1 Let 0 < r ≤ ˜r0. Suppose that F—————————————— satisf ies (3.4) and (3.6) in U (x, r).

Then for each x0 ∈ U (x, r), the following hold:

Bổ đề 4.1 Đặt ……Giả sử rằng …..thỏa mãn (3.4) và (3.6) trong ……

Thế thì đối với mỗi ….., những điều sau đây đúng:

…………………………….

And

Proof Let x0 ∈ U (x, r). Using Lemma 3.3, we have rank (F——————————————(x0)) =rank (F——————————————(x)),and

Và

Chứng minh Đặt …….Dùng Bổ đề 3.3, chúng ta có…….., và

………………………………………………

We have also the identity

Chúng ta cũng có đồng nhất thức

………………………………………..

Using (3.4), (3.6), (4.3), and (4.4), we obtain

Dùng (3.4), (3.6), (4.3), và (4.4), chúng ta thu được

…………………………………….

That completes the proof of Lemma 4.1

Điều đó hoàn thành chứng minh bổ đề 4.1

Remark 4.2 If equality holds in (2.1), then Lemma 4.1 reduces to Lemma 4.1 in [31]. Otherwise, it constitutes an improvement, since, the estimate

Nhận xét 4.2 Nếu đẳng thức đúng trong (2.1), thì bổ đề 4.1 rút về bổ đề 4.1 trong [31]. Nói cách khác, nó tạo ra một cải thiện, bởi vì, ước lượng

……………………………………………….

is used in [31], and in this case

được sử dụng trong [31], và trong trường hợp này

………………………………………

Using (4.2)instedof(4.5), we obtain the following improvements of Lemmas 4.2, 4.3, Theorem 4.1, and Corollaries 4.1–4.3 in [31].

Dùng (4.2) thay cho (4.5), chúng ta thu được những cải thiện sau đây của bổ đề 4.2, 4.3, Định lí 4.1, và các hệ quả 4.1-4.3 trong [31].

Lemma 4.3 Suppose that F—————————— satisf ies (3.4) and (3.6) in U (x, r0).Letx0 ∈U (x, r0),and let L ……… defined by

Bổ đề 4.3 Giả sử rằng ….thỏa mãn (3.4) và (3.6) trong …..Đặt …., và đặt L….được định nghĩa qua

……………………………

Then, the following hold:

Thế thì, những điều sau đây là đúng:

(i) ……….,where,

……………………………….

(ii) F—————————— satisf ies L–average Lipschitz condition in ………

Lemma 4.4 Let φκ :[0, rκ]−→ R def ined by

…………………………..

(i) ……, ở đây,

(ii) …….thỏa mãn điều kiện Lipschitz trung bình L trong…..

Bổ đề 4.4 Đặt …….được xác định qua

Then, φκ is a strictly decreasing function on [0, rκ], and has exact one zero rκ ∈[0, rκ] satisfying

…………………………………

Thế thì, ….là hàm giảm nghiêm ngặt trên …., và có đúng một zero….thỏa mãn

Theorem 4.5 Suppose that F——————————— satisf ies (3.4) and (3.6) in U (x, r0).Letx0 ∈ U (x,rκ),where rκ is given in Lemma 4.4.Then {xn} generated by (GNM) starting at x0 converges to a zero of F———————————(.)+ F(.).

Định lí 4.5 Giả sử rằng ….thỏa mãn (3.4) và (3.6) trong ……Đặt ….., ở đây ….được cho trong bổ đề 4.4. Thế thì ….được tạo bởi (GNM) bắt đầu tại …..hội tụ về zero của …….

Corollary 4.6 Suppose that F——————————— satisf ies (3.4) in U (x, r0).Letx0 ∈…...Then {xn} generated by (GNM) starting at x0 converges to a zero of F———————————(.)+ F(.).

Hệ quả 4.6 Giả sử rằng ……..thỏa mãn (3.4) trong ……Đặt…..Thế thì ….được tạo bởi (GNM) bắt đầu tại …hội tụ về zero của …….

Corollary 4.7 Suppose that F——————————— satisf ies (3.4) in U (x, r0), and the condition (3.31) holds. Let x0 ∈ U (x,r0),where r0 is the exact one zero of function φ0 :[0, r0]−→ R def ined by

Hệ quả 4.7 Giả sử rằng …..thỏa mãn (3.4) trong….., và điều kiện (3.31) đúng. Đặt ….., ở đây …..ở ngay tại một zero của hàm …..được định nghĩa là

…………………………………

Then {xn} generated by (GNM) starting at x0 converges to a zero of F———————————(.)+ F(.).

Corollary 4.8 Suppose that F——————————— is surjective, and satisf ies (3.4) in U (x, r0). Let x0 ∈ U (x,r0),where r0 is given in Corollary 4.7.Then {xn} generated by (GNM) starting at x0 converges to a solution of F(x) = 0.

Remark 4.9 The local results obtained can also be used to solve equation of the form F(x) = 0,where F——————————— satisfies the autonomous differential equa-tion [4]:

………………………………………..

Thế thì ….được tạo ra bởi (GNM) bắt đầu tại ….hội tụ về một zero của…….

Hệ quả 4.8 Giả sử rằng …toàn ánh, và thỏa mãn (3.4) trong …….Đặt ….., ở đây …..được cho trong hệ quả 4.7. Thế thì …..được tạo ra bởi (GNM) bắt đầu tại ….hội tụ về một nghiệm của ……..

Nhận xét 4.9 Các kết quả cục bộ thu được cũng có thể được dùng để giải phương trình dạng …., ở đây ….thỏa mãn phương trình vi phân tự định (tự sinh hay độc lập) [4]:

……………………………..

where T : Y −→ X is a known continuous operator.

Since F———————————(x) = T(F(x)) = T(0), we can apply our results without actually knowing the solution of x of equation F(x) = 0. As an example, let X = Y = (−∞, +∞), D = U (0, 1), and define function F on D by

………………………………………..

Then, for x= 0,wecanset T(x) = x + 1 in (4.7).

Ở đây …….là một toán tử liên tục đã biết.

Bởi vì ………., chúng ta có thể áp dụng các kết quả của chúng ta mà không cần biết nghiệm ….của phương trình ….Chẳng hạn như, đặt ……., và định nghĩa hàm F trên D qua

……………………….

Thế thì, đối với ….., chúng ta có thể đặt……………trong (4.7).

5 Semilocal convergence II of (GNM)

5 Hội tụ bán cục bộ II của (GNM)

We shall provide a semilocal convergence for (GNM) using our new concept of recurrent functions. This idea has already produced a finer convergence analysis for iterative methods using invertible operators or outer or general-ized inverses [5–7].

Chúng ta sẽ cung cấp một hội tụ bán cục bộ đối với (GNM) dùng các khái niệm mới của chúng ta về các hàm truy hồi. Ý tưởng này đã tạo ra phân tích hội tụ tốt hơn cho các phương pháp lặp dùng các toán tử nghịch đảo hoặc các nghịch đảo bên ngoài hoặc nghịch đảo suy rộng (hoặc tổng quát hóa) [5-7]

We need to define some parameters, sequences, and functions.

Chúng ta cần định nghĩa một số tham số, dãy, và các hàm.

Definition 5.1 Let x0 ∈ D , κ ∈[0, 1),and λ ∈[0, 1).

Định nghĩa 5.1 Đặt ….,…., và …….

Define parameter β, iteration {vλ,n}, functions fλ,n, ελ,n, μλ,n on [0, 1),and

ξλ on ……….by

Định nghĩa tham số β, phép lặp $\{v_\lambda,n\}$, các hàm $f_{\lambda,n}$, $\varepsilon_{\lambda,n}$, $\mu_{\lambda,n}$ trên [0,1], và ξ_λ trên …..qua

…………………………………….

where,

ở đây,

…………………………………………………

Define function fλ,∞ on [0, 1) by

Định nghĩa hàm $f_{\lambda,\infty}$ trên [0, 1) qua

……………………..

Remark 5.2 Using (5.2), and (5.11), we get

Nhận xét 5.2 Dùng (5.2), và (5.11), chúng ta thu được

……………………………

It then follows from (5.2)–(5.10) that the following identities hold:

Từ (5.2)-(5.10) suy ra các đẳng thức sau đúng:

…………………………………

Và

………………………………

We need the following result on majorizing sequences for (GNM)

Lemma 5.3 Let parameters β, κ, λ, iteration $\{v_{\lambda,n}\}$, and functions $f_{\lambda,n}$, $\varepsilon_{\lambda,n}$, $\mu_{\lambda,n}$,

and ξ_λ be as in Def inition 5.1.

Assume there exists $\alpha_\lambda \in (0, 1)$ such that

Chúng ta cần kết quả sau trên các dãy trội của (GNM)

Bổ đề 5.3 Đặt các tham số….., phép lặp …., và hàm …….và …..như trong định nghĩa 5.1.

Giả sử tồn tại …..sao cho

…………………………………………………..

Và

………………………………..

Then, iteration $\{v_{\lambda,n}\}$ given by (5.1) is non–decreasing, bounded from above by

Thế thì, phép lặp…..được cho bởi (5.1) không tăng, được lấy cận từ trên bởi

………………………………..

and converges to its unique least bound v_λ such that

và hội tụ về cận nhỏ nhất duy nhất của nó ….sao cho

…………………………………..

Moreover, the following estimates hold for all $n \geq 0$:

Hơn nữa, các ước lượng sau đây là đúng đối với mọi $n \geq 0$:

………………………………………………..

Và

……………………………………………….

Proof Estimate (5.23)istrue,if

Chứng minh Ước lượng (5.23) là đúng, nếu

………………………………

holds for all $n \geq 1$.

Đúng đối với mọi $n \geq 1$.

It follows from (5.1), (5.16), and (5.17) that estimate (5.25) holds for $n = 1$.

Từ (5.1), (5.16), và (5.17), suy ra rằng ước lượng (5.25) đúng đối với $n=1$.

Then, we also have that (5.23) holds for $n = 1$,and

Thế thì, chúng ta cũng có (5.23) đúng đối với $n=1$, và

………………………………

Using the induction hypotheses, and (5.26), estimate (5.25)istrue,if

Dùng giả thuyết quy nạp, và (5.26), ước lượng (5.25) đúng, nếu

…………………………………………….

Hoặc

………………………………………………….

hold for all $k \leq n$.

đúng đối với mọi $k \leq n$.

Estimate (5.28) (for $d\lambda = \alpha\lambda$) motivates us to introduce function $f\lambda,k$ given by (5.2), and show instead of (5.28)

Ước lượng (5.28) (đối với dλ = αλ) thúc đẩy chúng tôi đưa vào hàm …..được cho bởi (5.2), và cho thấy thay vì (5.28)

…………………………………………….

We have by (5.13)–(5.15) (for dλ = αλ)and(5.19)that

Qua (5.13)–(5.15) (đối với dλ = αλ) và (5.19), chúng ta có

…………………………………………….

In view of (5.11), (5.12), and (5.30), estimate (5.29) shall holds, if (5.20)is true, since

Nhìn vào (5.11), (5.12), và (5.30), ước lượng (5.29) sẽ đúng, nếu (5.20) đúng, bởi vì

……………………………..

and the induction is completed.

và phép quy nặp hoàn thoành.

It follows from (5.23)and(5.26) that iteration {vλ,n} is non–decreasing, bounded from above by vλ given by (5.21), and as such it converges to vλ. Finally, estimate (5.24) follows from (5.23) by using the standard majorization techniques [4–6].

Từ (5.23) và (5.26) suy ra rằng phép lặp …không tăng, được lấy biên từ trên qua….được cho bởi (5.21), và như thế nó hội tụ về ….Cuối cùng, ước lượng (5.24) suy ra từ (5.23) bằng cách dùng các kỹ thuật trội tiêu chuẩn [4-6].

That completes the proof of Lemma 5.3.

Điều đó hoàn thành chứng minh bổ đề 5.3.

We can show the following semilocal convergence result for (GNM) using recurrent functions, wich is the analog of Theorem 3.6.

Chúng ta có thể chứng minh kết quả hội tụ bán cục bộ sau đây cho (GNM) dùng các hàm truy hồi, nó tương tự như Định lí 3.6.

Theorem 5.4 Let λ ≥ ˜λ0. Assume

Định lí 5.4 Đặt …..Giả sử

……………………………………..

F—————————— satisf ies (3.4),and (3.6) on U (x0,vλ); and Hypotheses of Lemma 2.2 hold.

Then, sequence {xn} generated by (GNM) is well def ined, remains in U (x0,vλ) for all n ≥ 0, and converges to a zero xof F——————————(.)+ F(.) in U (x0,vλ).

Moreover, the following estimates hold:

…..thỏa mãn (3.4), và (3.6) trên …..; và Giả thiết của bổ đề 2.2 đúng.

Thế thì, dãy ….được tạo ra bởi (GNM) hoàn toàn xác định, giữ nguyên trên…đối với mọi n ≥ 0, và hội tụ về zero của……….trong……..

Hơn nữa, các ướng lượng sau đây đúng:

…………..

And

Và

………………………………..

Proof AsinTheorem3.6,wearriveattheestimateonlineabove(3.24) (with vλ,k replacing sλ,k), which in view of (5.1)leadsto

Chứng minh Như trong Định lí 3.6, chúng ta đi đến ước lượng trên đường ở trên (với ….thay cho …..), nhìn vào (5.1) nó dẫn đến

………………………………….

Estimates (3.18), (3.19), (5.35), and Lemma 5.3 implie that sequence {xk} is a complete sequence in Rm, and as such it converges to some x ∈ U (x0,vλ) since U (x0,vλ) is a closed set).

Các ướng lượng (3.18), (3.19), (5.35), và Bổ đề 5.3 cho thấy rằng dãy ….là dãy hoàn chỉnh trong …., và như thế nó hội tụ về …nào đó vì …là tập đóng.

That completes the proof of Theorem 5.4.

Điều đó hoàn thành chứng minh định lí 5.4.

Remark 5.5

Nhận xét 5.5

(a) The point vλ given in closed form by (5.21) can replace vλ in hypothesis

(5.32).

(a) Điểm ….được cho dưới dạng đóng bởi (5.21) có thể thay thế …trong giả thiết (5.32).

(b) Hypotheses of Lemma 5.2 involve only computations at the initial data.

These hypotheses differ from (3.13) given in Theorem 3.6.

(b) Giả thiết của Bổ đề 5.2 chỉ liên quan đến các tính toán ở dữ liệu ban đầu.

Những giả thiết này khác với (3.13) được cho trong Định lí 3.6.

In practice, we shall test to see which of the two are satisfied if any. If

both conditions are satisfied, we shall use the more precise error bounds

given in Theorem 5.4 (see also Section 4).

Trong thực tế, chúng ta sẽ kiểm tra xem cái nào trong hai cái được thỏa mãn. Nếu cả hai điều kiện được thỏa mãn, chúng ta sẽ dùng các cận lỗi chính xác hơn (hay biên lỗi) được cho trong Định lí 5.4 (xem Phần 4)

In Section 6, we show that the conditions of Theorem 5.4 can be weaker than those of Theorem 3.6.

Trong Phần 6, chúng tôi chứng tỏ rằng các điều kiện của Định lí 5.4 có thể yếu hơn các điều kiện của Định Lí 3.6.

6 Ứng dụng

We compare the Kantorovich–type conditions introduced in Section 5 with the corresponding ones in Section 3.

Chúng ta so sánh các điều kiện loại Kantorovich được đưa vào trong phần 5 với các điều kiện tương ứng trong phần 3.

6.1 Semilocal case

6.1 Trường hợp bán cục bộ

An operator Q : Rm −→ Rl is said to be Lipschitz continuous on D 0 ⊆ D with modulus L > 0 if

Một toán tử ……được gọi là liên tục Lipschitz trên ……với mô đun ….nếu

………………………………..

and *center–Lipschitz continuous on D 0 with modulus L0* > 0 if

và liên tục Lipschitz trung tâm trên …với mô đun …..nếu

…………………………………..

Let x0 ∈ D ,and r > 0 be such that U (x0, r) ⊆ D . Clearly, if F————————————(x0)+ F————————————is Lipschitz continuous on U (x0, r) with modulus L,then F———————————— satisfies the modified L–average Lipschitz condition on U (x0, r). Similarily, if F————————————(x0)+ F———————————— is center Lipschitz continuous on U (x0, r) with modulus L0,then F———————————— satisfies the modified center L0–average Lipschitz condition on U (x0, r).

Đặt …., và …..sao cho …..Rõ ràng, nếu …..liên tục Lipschitz trên …..với mô đun L, thế thì ….thỏa mãn điều kiện Lipschitz trung bình L hiệu chỉnh trên ….Tương tự, nếu ……liên tục Lipschitz trung tâm trên ……với mô đun …., thì …..thỏa mãn điều kiện Lipschitz trung bình L0 trung tâm hiệu chỉnh trên …..

Using (2.2), (2.3), (2.9), and (2.10), we get for t ≥ 0:

Dùng (2.2), (2.3), (2.9), và (2.10), đối với t ≥ 0, chúng ta thu được:

…………………………

Và

………………………..

Moreover, if

Hơn nữa, nếu

………………………..

Then,

Thế thì,

………………………….…

We have the following improvement of Theorem 5.1 in [31].

Theorem 6.1 Let λ = ˜λ0 = (1 − β L0)κ. Assume

Chúng ta có cải tiến sau trong định lí 5.1 trong [31].

Định lí 6.1 Đặt ………………….Giả sử

…………………………………

and F———————————(x0)+ F——————————— satisf ies (6.1),and (6.2) on U (x0, tλ).

Then, sequence {xn} generated by (GNM) is well def ined, remains in U (x0, tλ) for all n ≥ 0, and converges to a zero xof F———————————(.)+ F(.) in U (x0, tλ).

Moreover, the following estimates hold

Và ….thỏa mãn (6.1), và (6.2) trên ……..

Thế thì, dãy ….được tạo bởi (GNM) hoàn toàn xác định, giữ nguyên trong ….đối với mọi n ≥ 0, và hội tụ về zero của ……trong……..

Hơn nữa, những ước lượng sau đây đúng

……………………………………

Và

………………………………………..

Proof Similarily replace {tλ,n} by {sλ,n} in the proof of Theorem 5.1 in [31]. That completes the proof of Theorem 6.1.

We provide now example, where κ = 0, and the hypotheses of Theorem 6.1 are satisfied, but not earlier ones [23, 26].

Example 6.2 [8, 26]Let i = j = 2,and R2 be equipped with the 1–norm. Choose:

Chứng minh Tương tự, thay …..bằng …….trong phần chứng minh định lí 5.1 trong [31]. Điều đó hoàn thành chứng minh định lí 6.1.

Bây giờ chúng tôi đưa ra một ví dụ, trong đó …., và các giả thiết của định lí 6.1 được thỏa mãn, chứ không phải các giả thiết trước [23,26].

Ví dụ 6.2 [8,26] Đặt….., và …..được trang bị chuẩn 1. Chọn:

……………………………………………………

Define function F on U (x0,σ) ⊆ D (σ = .72)by

Định nghĩa hàm F trên ……bởi

…………………………………..

Then, for each x = (v, w)T ∈ D , the Fréchet–derivative of F at x, and the Moore–Penrose–pseudoinverse of F————————————(x) are given by

Thế thì, đối với mỗi ….., đạo hàm Fréchet của F tại x, và giả nghịch đảo Moore–Penrose của ….là

……………………………………

và

………………………………………..

respectively.

tương ứng.

Let $x = (v1,w1)T \in D$ and $y = (v2,w2)T \in D$ .By(6.14), we have

Đặt …..và …..Qua (6.14), chúng ta có

………………………………………………

That is $L = L0 = 1$.

Đó là ………

Using (6.14), (6.15)and(3.1), we obtain:

Dùng (6.14), (6.15) và (3.1), chúng ta thu được:

…………………………………..

Hence the constant κ in hypothesis (3.1) is given by:

Vì thế hằng số …..trong giả thiết (3.1) là:

……………………………….

Using hypotheses of Theorem 6.1, (6.13)–(6.15), Theorem 2.4 in [23], and Theorem 3.1 in [26] are not applicable. However, our Theorem 6.1 can apply to solve equation (6.13).

Dùng các giả thiết của định lí 6.1, (6.13)–(6.15), Định lí 2.4 trong [23], và định lí 3.1 trong [26] không áp dụng được. Tuy nhiên, định lí 6.1 của chúng ta có thể áp dụng để giải phương trình (6.13).

Remark 6.3 If $L = L0$, Theorem 6.1 reduces to [31, Theorem 5.1]. Otherwise, it constitues an improvements (see Lemma 2.2).

Nhận xét 6.3 Nếu …., Định lí 6.1 rút về [31, định lí 5.1]. Nói cách khác, nó cấu thành những cải thiện (xem Bổ đề 2.2).

If $\kappa = 0$ (Newton's method for h0), we have $\lambda = 0$,and = 1/2.Then sequences $\{t\lambda,n\}$ and $\{v\lambda,n\}$ reduce to:

Nếu …..(phương pháp Newton đối với ….), chúng ta có …., và ……Thế thì các dãy …và …rút về:

…………………………………….

Và

……………………………………

respectively. The corresponding sufficient convergence conditions are:

tương ứng. Các điều kiện hội tụ đầy đủ tương ứng là:

………………………………………………..

Và

……………………………………………….

Where,

Ở đây,

………………………………………….

(see Lemma 5.3).

(xem bổ đề 5.3).

Note that

Chú ý rằng

…………………………………………….

but not necessarily vice versa unless if L = L0. Moreover, since L0 L can be arbitrarily small, we have by (6.18), and (6.19)that

nhưng không cần ngược lại nếu không có …..Hơn nữa, bởi vì …có thể nhỏ tùy ý, qua (6.18), và (6.19) chúng ta có

…………………………………..

That is our approach extends the applicability of (GNM) by at must four times.

Concerning the error bounds, we have already shown (see Lemma 2.2) that vn} is a tighter majorizing sequence for {xn} than {tn} (see Example 6.4 (b)).

Đó là cách tiếp cận của chúng tôi để mở rộng khả năng của (GNM) bốn lần.

Về các biên lỗi (cận lỗi, cận sai số, biên sai số)(cận lỗi), chúng tôi đã chứng tỏ rằng (xem bổ đề 2.2) đối với $\{x_n\}$, $\{v_n\}$là một chuỗi trội mạnh hơn $\{t_n\}$ (xem ví dụ 6.4 (b)).

Example 6.4 Let X = Y = R2, be equipped with the max–norm, D =[, 2 −]2, ∈[0, 1), and define function F on D by

Ví dụ 6.4 Đặt….., được trang bị với chuẩn cực đại, ………, và định nghĩa hàm F trên D qua

…………………………………………….

The Fréchet–derivative of operator F is given by

Đạo hàm Fréchet của toán tử F là

…………………………………………………

(a) Let x0 = (1, 1)T . Using hypotheses of Theorem 6.1, we get:

Đặt ……..Dùng các giả thiết của định lí 6.1, chúng ta thu được:

....

Condition (6.18) is violated, since

Điều kiện (6.18) bị vi phạm, bởi vì

……………………………..

Hence, there is no guarantee that (NM) converges to x= (3√, 3√)T , starting at x0. However, our condition (6.19)istrueforall ∈ I =.450339002, 1 . Hence, the conclusions of our Theorem 6.1 can apply to solve equation (6.23)forall ∈ I.

Vì thế, không thể đảm bảo (NM) hội tụ về ….., bắt đầu tại …..Tuy nhiên, điều kiện (6.19) của chúng ta là đúng đối với mọi …….Vì thế, các kết luận của định lí 6.1 có thể áp dụng để giải phương trình (6.23) đối với mọi ……..

(b) Let x0 = (.9,.9)T ,and = .7. Using hypotheses of Theorem 6.1, we get:

....

Đặt …………., và ……Dùng giả thiết của Định lí 6.1, chúng ta thu được:

Then (6.18)and(6.19) are satisfied.

Thế thì (6.18) và (6.19) được thỏa mãn.

We have also:

Chúng ta cũng có:

…………………

where, I is the identity 2×2 matrix.

ở đây I là ma trận đơn vị 2×2

The hypotheses of our Theorem 6.1, and the Kantorovich theorem are satisfied. Then (NM) converges to x= (.8879040017,.8879040017)T , starting at x0. We also can provide the comparison table using the software Maple 13.

Các giả thiết của định lí 6.1 của chúng ta, và định lí Kantorovich được thỏa mãn. Thế thì (NM) hội tụ về ………., bắt đầu tại ….Chúng tôi cũng có thể cung cấp bảng so sánh dùng phần mềm Maple 13.

…………………………………

The table shows that our error bounds vn+1 − vn are tighter than tn+1 − tn. We also have the following result on error bound for (GNM).

Bảng cho thấy rằng các biên lỗi (cận lỗi, cận sai số, biên sai số)của chúng tôi …chặt chẽ hơn …… Chúng tôi cũng có các kết quả sau trên biên lỗi (cận lỗi, cận sai số, biên sai số) đối với (GNM).

Lemma 6.5 [7] Assume that there exist constants $L0 \geq 0, L \geq 0$, with $L0 \leq L$, and $\beta \geq 0$, such that:

Bổ đề 6.5 [7] Giả sử rằng tồn tại các hằng số ……, với ….., và ……., sao cho:

…………………………..

where, Lisgivenby (6.20).

ở đây, …. được cho trong (6.20).

Then, sequence {vk} ($k \geq 0$)givenby (6.17) is well def ined, nondecreasing, bounded above by v, and converges to its unique least upper bound v $\in$[0,v],where

Thế thì, dãy …..($k \geq 0$) được cho bởi (6.17) hoàn toàn xác định, không tăng, có cận trên là …., và hội tụ về cận trên nhỏ nhất duy nhất của nó là ….., ở đây

……………………………………

Moreover, the following estimates hold:

Hơn nữa, những ước lượng sau đây đúng:

…………………………..

Remark 6.6 If L = L0, the error bounds reduce to the classical ones [31]. Otherwise, the error bounds are tighter since the ratio 2 hAH is smaller than 2 hLHW (see also the comparison table in Example 6.4).

Nhận xét 6.6 Nếu ….., các biên lỗi (cận lỗi, cận sai số, biên sai số) rút về các biên lỗi cổ điển [31]. Mặt khác, các biên lỗi (cận lỗi, cận sai số, biên sai số) chặt chẽ hơn bởi vì tỉ số ….nhỏ hơn ….(xem bảng so sánh trong ví dụ 6.4).

We provide numerical examples [6], where L0 < L.

Chúng tôi đưa ra các ví dụ số [6], ở đây …….

Example 6.7 Define the scalar function F by F(x) = c0 x + c1 + c2 sin ec3 x, x0 = 0,where ci, i = 0, 1, 2, 3 are given parameters. Then it can easily be seen that for c3 large and c2 sufficiently small, L L0 can be arbitrarily large.

Example 6.8 Let X = Y = C [0, 1], equipped with the max–norm. Consider the following nonlinear boundary value problem [4]

Ví dụ 6.7 Định nghĩa hàm vô hướng F là …….., ở đây…,….là các tham số cho trước. Thế thì, có thể dễ dàng thấy rằng đối với c3 lớn và c2 đủ nhỏ, ….có thể lớn tùy ý.

Ví dụ 6.8 Đặt …….[0,1], được trang bị với chuẩn cực đại. Xét bài toán giá trị biên phi tuyến sau [4]

…………………………………..

It is well known that this problem can be formulated as the integral equation

Chúng ta cũng biết rằng bài toán này có thể được phát biểu dưới dạng phương trình tích phân

…………………………………………………

where, Q is the Green function:

ở đây, Q là hàm Green:

………………………..

We observe that.

Chúng ta thấy điều đó.

…………………………

Then problem (6.25) is in the form (1.1), where, F : D −→ Y is defined as

Thế thì bài toán (6.25) ở dạng (1.1), ở đây …..được định nghĩa là

………………………………………

If we set u0(s) = s,and D = U (u0, R),thensince u0 = 1, it is easy to verify that U (u0, R) ⊂ U (0, R + 1).If 2 γ< 5, then, the operator F———————————— satisfies conditions (6.1), and (6.2), with

Nếu chúng ta đặt …, và …., thế thì bởi vì …., dễ dàng thấy rằng ……..Nếu ….., thế thì, toán tử ….thỏa mãn điều kiện (6.1), và (6.2), với

…………………………..

Note that L0 < L.

Chú ý rằng ……

Other applications and examples including the solution of nonlinear Chandrasekhar–type integral equations appearing in radiative transfer are also find in [4–6].

Các ứng dụng khác và các ví dụ liên quan đến nghiệm của các phương trình tích phân loại Chandrasekhar xuất hiện trong chuyển dịch bức xạ cũng có thể tìm thấy trong tài liệu tham khảo [4–6].

6.2 Local case

6.1 Trường hợp cục bộ

Let x ∈ D be such that F(x) = 0, F————————————(x) = 0,and(4.1) holds.

Đặt ……sao cho …….., và (4.1) đúng.

We present the following improvement of Theorem 5.2 in [31].

Chúng ta đưa vào cải tiến sau của Định lí 5.2 trong [31].

Theorem 6.9 Assume that F————————————(x)+ F———————————— satisf ies (6.1),and (6.2) on U (x, 1L0). Then, sequence {xn} generated by (GNM) is well def ined, remains in U (x, R0) for all n ≥ 0, and converges to a zero xof F————————————(.)+ F(.) in U (x, R0), where,

Định lí 6.9 Giả sử rằng ….thỏa mãn (6.1), và (6.2) trên ….Thế thì, dãy …..được tạo bởi (GNM) hoàn toàn xác định, giữ nguyên trên …đối với mọi n ≥ 0, và hội tụ về zero …..của …..trong ….., ở đây.

…………………………………

Proof Note that the quantity under the radical in non–negative by (6.26). Let

Chứng minh Chú ý rằng đại lượng dưới dấu căn không âm qua (6.26).

Đặt

………………………..

Và

……………………………………..

Then, by Lemma 4.3, F——————————(x) + F—————————— is ˜L–Lipschitz continuous on U (x0, ˜r), and

Thế thì, qua bổ đề 4.3, ……..là liên tục Lipschitz L trên ….., và

……………………………….

Since

Bởi vì

……………………

That is

Tức là

…………………..

Using Lemma 4.1, we have

Dùng bổ đề 4.1, chúng ta có

…………………………

so,

vì vậy,

…………………………..

by the choice of R0, and the function

qua việc chọn …, và hàm

…………………………..

For s ≤ t, ϒ is increasing on (0, 1)2. Therefore, Theorem 6.1 is applicable. That completes the proof of Theorem 6.9.

Remark 6.10 If L = L0, Theorem 6.9 reduces to Theorem 5.2 in [31]. Other-wise, it is constitues an improvement since the radius of convergence

Đối với, …..tăng trên …..Do đó, Định lí 6.1 có thể áp dụng được.

Điều đó hoàn thành chứng minh Định lí 6.9.

Nhận xét 6.10 Nếu …., Định lí 6.9 rút về định lí 5.2 trong [31]. Nó tạo ra sự cải tiến bởi vì bán kính hội tụ

…………………………

given in [31] is smaller than R0. Hence, our Theorem 6.9 allows a wider choice of initial guesses x0, and also provides tighter error bounds than Theorem 5.2 in [31].

Example 6.11 [4, 6]Let X = Y = R. Define function F on D =[−1, 1], given by

Được cho trong [31] nhỏ hơn ….Vì thế, định lí 6.9 của chúng ta cho phép lựa chọn nghiệm dự đoán ….ban đầu rộng hơn, và cũng đưa ra các biên lỗi (cận lỗi, cận sai số, biên sai số) chặt chẽ hơn Định lí 5.2 trong tài liệu tham khảo [31].

Ví dụ 6.11 [4,6] Đặt …..Định nghĩa hàm F trên ….., được cho bởi

……………………………………………

Then, for x= 0,using(6.28), we have F(x) = 0,and F——————————————(x) = e0 = 1.More- over, L = e > L0 = e − 1.

Thế thì, đối với …., dùng (6.28), chúng ta có ….., và …..Hơn nữa, ……..

Example 6.12 Let X = Y = C [0, 1], the space of continuous functions defined on [0, 1], equipped with the max norm, and D = U (0, 1). Define function F on D , given by

Ví dụ 6.12 Đặt ……., không gian của các hàm liên tục được định nghĩa trên [0,1], được trang bị chuẩn cực đại, và ….Định nghĩa hàm F trên D, được cho bởi

……………………

Then, we have:

Thế thì, chúng ta có:

………………….

Using (6.29), for x(x) = 0 for all x ∈[0, 1], we get

Dùng (6.29), đối với ……đối với mọi …., chúng ta có

………………………..

We also have in this example L0 < L.

Trong ví dụ này chúng ta cũng có ……

7 Conclusion

Using our new concept of recurrent functions, and a combination of average Lipschitz/center–Lipschitz conditions, we provided a semilocal/local conver-gence analysis for (GNM) to approximate a locally unique solution of a system of equations in finite dimensional spaces. Our analysis has the following advantages over the work in [31]: weaker sufficient convergence conditions, and larger convergence domain. Applications of our results to Kantorovich’s analysis are also provided in this study.

7 Kết luận

Dùng khái niệm mới về hàm truy hồi của chúng tôi, và sự kết hợp giữa điều kiện Lipschitz trung tâm/ Lipschitz trung bình, chúng tôi đã đưa ra phân tích cục bộ cũng như bán cục bộ cho (GNM) để xấp xỉ nghiệm duy nhất cục bộ của hệ phương trình trong không gian có số chiều xác định. Việc phân tích của chúng tôi có nhiều ưu điểm hơn so với công trình [31]: các điều kiện hội tụ đủ yếu hơn, và miền hội tụ lớn hơn. Việc ứng dụng các kết quả của chúng tôi cho phân tích Kantorovich cũng được đưa ra trong nghiên cứu này.